CIMAT

90EDO01 | Ecuaciones Diferenciales Ordinarias | Marzo 15, 2011

Equivalencia de normas en espacios vectoriales de dimensión finita.

Teorema: Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces todas sus normas son equivalentes.

Demostración: Sea V espacio vectorial de dimensión $n > 0$ sobre un campo K (por ejemplo $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$). Sean $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ dos normas sobre V y definamos una tercera norma a partir de la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Así, para $u \in V$, existen escalares $a_i \in K$ únicos tales que $u = \sum_i^n a_i v_i$, y definimos

$$||u||_{\mathcal{B}} := \max\{|a_i| \mid i = 1, \ldots, n\},$$

donde $|a_i|$ es el valor absoluto de los escalares $a_i \in K$ (verificar que $||\cdot||_{\mathcal{B}}$ es una norma).

Supongamos primero que $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ son equivalentes a $||\cdot||_{\mathcal{B}}$. Esto es, existen escalares $c_1, c_2, C_1, C_2 > 0$ tales que para cada $u \in V$,

$$c_i||u||_{\mathcal{B}} \leq ||u||_i \leq C_i||u||_{\mathcal{B}}.$$

De aquí que

$$\frac{c_2}{C_1}||u||_1 \leq c_2||u||_{\mathcal{B}} \leq ||u||_2 \leq C_2||u||_{\mathcal{B}} \leq \frac{C_2}{c_1}||u||_1,$$

por lo que $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ son equivalentes entre sí.

Representemos por $||\cdot||$ alguna de las normas $||\cdot||_i, i = 1, 2$. Veamos que $||\cdot||$ es equivalente a $||\cdot||_{\mathcal{B}}$. Si $u = \sum_i^n a_i v_i$, entonces

$$||u|| \leq \sum_i^n (|a_i| \ ||v_i||) \leq ||u||_{\mathcal{B}} \sum_i^n ||v_i||.$$

Como $\sum ||v_i||$ es una constante determinada por la base, entonces hemos obtenido que $||\cdot||$ *es más débil que* $||\cdot||_{\mathcal{B}}$ en V[1].

[1]Esto es, $||\cdot||_1$ es más débil que $||\cdot||_2$ si para todo $v \in V$ existe una constante $k > 0$ tal que $||v||_1 \leq k||v||_2$.

Sea $S_{\mathcal{B}} = \{v \in V \mid ||v||_{\mathcal{B}} = 1\}$ la esfera unitaria con respecto a la base $\mathcal{B}$ y sea $\{w_k\}$ una sucesión en $S_{\mathcal{B}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} ||w_k|| = \inf\{||v|| \mid v \in S_{\mathcal{B}}\}.$$

Encontremos un $w \in S_{\mathcal{B}}$ que realiza dicho ínfimo.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sean $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ escalares tales que $w_k = \sum_i^n a_{k,i} v_i$. Como $w_k \in S_{\mathcal{B}}$ entonces $||a_{k,i}||_{\mathcal{B}} \le 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y para $i = 1, 2, \ldots n$. Como los escalares están acotados, podemos encontrar una subsucesión de w_k (llamémosle también w_k) tales que, para sus escalares, $\lim_{k\to\infty} a_{i,k}$ existe y es igual a a_i, con $i = 1, 2, \ldots, n$.

Al definir $w = \sum_i^n a_i v_i$ se tiene $\lim ||w - w_k||_{\mathcal{B}} = 0$, esto es, $w_k \to w$ en la norma $||\cdot||_{\mathcal{B}}$. Más aún, $||w||_{\mathcal{B}} = 1$ (¿por qué?) y en particular, $w \neq 0$.

Lema: Sean $x, y \in V$ y definamos $\xi = \max\{||v_i|| \mid i = 1, \ldots, n\}$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, $||x - y|| < \varepsilon$ si $||x - y||_{\mathcal{B}} < \varepsilon/\xi n$.
(La desigualdad $||x - y|| < \varepsilon$ se sigue de notar que para cada $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$|\alpha_i - \beta_i| < \frac{\varepsilon}{\xi n}$$

donde $x = \sum \alpha_i v_i$, $y = \sum \beta_i v_i$.)

Del Lema y la convergencia de w_k a w en la norma $||\cdot||_{\mathcal{B}}$ se sigue que $||w - w_k|| \to 0$, es decir, $\lim ||w_k|| = ||w||$. Por construcción, $||w|| = \inf\{||v|| \mid v \in S_{\mathcal{B}}\}$ y como $w \neq 0$, el ínfimo es positivo. Luego, para cualquier $u \in V$ no nulo, $u/||u||_{\mathcal{B}} \in S_{\mathcal{B}}$ y por lo tanto

$$||w|| \le \left|\left| \frac{u}{||u||_{\mathcal{B}}} \right|\right| = \frac{||u||}{||u||_{\mathcal{B}}}$$

Esto es, $||\cdot||_{\mathcal{B}}$ es más débil que $||\cdot||$.

Concluímos que $||\cdot||$ y $||\cdot||_{\mathcal{B}}$ son equivalentes.

$\square$

Functional Analysis
Carl L. DeVito
Academic Press, 1978.