CIMAT

90EDO01 | Ecuaciones Diferenciales Ordinarias | Abril 14, 2011

Tarea 10

Para los problemas 2 y 3, considere $\bar{x}' = f(\bar{x})$ con $\bar{x} \in \mathbb{R}^n, f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, y defina los conjuntos omega- y alfa-límite de $p \in U$ por

$$\begin{aligned}
\alpha(p) &= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists\{t_i\}, t_1 > t_2 > \ldots, t_i \to -\infty \text{ y } \varphi_{t_i}(p) \to \bar{x} \text{ cuando } i \to \infty\}, \\
\omega(p) &= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists\{t_i\}, t_1 < t_2 < \ldots, t_i \to \infty \text{ y } \varphi_{t_i}(p) \to \bar{x} \text{ cuando } i \to \infty\}.
\end{aligned}$$

1. Suponga que $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función $T-$periódica, $T > 0$. Encuentre el multiplicador y exponente de Floquet del sistema $T-$periódico $x' = a(t)x$. Además, encuentre la forma normal de Floquet para la "matriz" fundamental principal en $t = t_0$.

2. Demuestre que $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ son cerrados e invariantes bajo el flujo de la ecuación.

3. Si para todo $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_t(p)$ está totalmente contenida en un compacto $K \subset U$, demuestre que los conjuntos $\alpha(p)$ y $\omega(p)$ son conexos.

4. Omitiendo la hipótesis de compacidad en el problema anterior, construya un ejemplo de un flujo no trivial en $\mathbb{R}^n$ cuyo ω-límite es disconexo.

5. Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, defina

$$F_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{como} \quad F_\varepsilon(x) = x + \varepsilon f(x).$$

Demuestre que F_ε es invertible en una vecindad del origen y calcule $DF_\varepsilon^{-1}(0)$.

Problema extra a la vuelta.

Problema extra: (1pt.) Dos flujos completos φ_t y ψ_t sobre $\mathbb{R}^n$ son *topológicamente conjugados* si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$h(\varphi_t(\bar{x})) = \psi_t(h(\bar{x})),$$

para toda $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y toda $t \in \mathbb{R}$. Observen que la conjugación topológica es distinta de la *equivalencia* definida en clase (Lección 18: Cambio de Coordenadas).

Para dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ suponga que todos sus valores propios tienen parte real negativa (esto es, el origen es un pozo para las ecuaciones $\bar{x}' = A\bar{x}$ y $\bar{x}' = B\bar{x}$). Demuestre que los flujos asociados $\varphi_t = e^{tA}$ y $\psi_t = e^{tB}$ son topológicamente conjugados.

Fecha de entrega (tarea y problema extra): Abril 28, 2011 en clase.