CIMAT

90EDO01 | Ecuaciones Diferenciales Ordinarias | Mayo 10, 2011

Tarea 12

En todos los problemas (excepto donde se especifique), $x' = f(x)$ con $f \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ y $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto.

1. Considere el anillo
$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| \leq 2\},$$
contenido en U. Suponga que para todo punto $x \in \partial A$, $f(x)$ apunta hacia el interior de A. Suponga además que cada segmento radial de A es una sección transversal al campo vectorial. Demuestre que existe una trayectoria periódica en A *sin utilizar* el Teorema de Poincaré-Bendixson.

2. Considere el sistema
$$x' = g(x, y), \quad y' = h(x, y),$$
con $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$, $F = (g, h) \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$. Demuestre el siguiente criterio de no existencia de órbitas periódicas:

   > Si existe $D \subset \mathbb{R}^2$ una región simplemente conexa donde $\mathrm{div}(F)$ no es idénticamente cero y su signo es constante, entonces el sistema de ecuaciones no tiene órbitas cerradas en D.

   (Sugerencia: Teorema de Green)

3. Demuestre que el sistema
$$x' = ax - y + xy^2, \quad y' = x + ay + y^3,$$
tiene un cíclo límite inestable cuando $a < 0$ y ningún cíclo límite cuando $a > 0$. *(Sugerencia: coordenadas polares)*

4. Sean $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tales que $f(x) \cdot g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que si f tiene una órbita cerrada, entonces g tiene un cero.

Fecha de entrega: Mayo 17, 2011 en clase.