CIMAT

90EDO01 — Ecuaciones Diferenciales Ordinarias — Febrero 3, 2011

Tarea 2

1. Sea $\{\varphi : J \times U \to E\}$ un flujo C^1 definido sobre abiertos $J \subset \mathbb{R}$ y $U \subset E$. Demuestre que existe una ecuación diferencial cuyo conjunto de soluciones es el flujo φ_t.

2. Utilizando como modelo el Teorema Local de E & U visto en clase, enuncie y proporcione una demostración detallada de existencia y unicidad local para un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes y valor inicial:
$$\bar{x}' = A\bar{x}, \quad \text{con} \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0,$$
donde $\bar{x}_0, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $A = (a_{ij})$ es una matriz $n \times n$ de coeficientes constantes, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

3. Utilizando la Desigualdad de Gronwall, proporcione una demostración alternativa a la unicidad de soluciones del problema de valor inicial
$$x' = f(x) \quad x(t_0) = x_0.$$

4. Sean $f, g \in C^1(U, E)$ y J un intervalo cerrado que contiene a t_0. Denote por $z, y : J \to U$ respectivamente, dos soluciones a las ecuaciones diferenciales
$$z' = f(z) \quad \text{y} \quad y' = g(y).$$
Si existen $\varepsilon, \delta > 0$ tales que para toda $x \in U$,
$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad |z(t_0) - y(t_0)| \leq \delta,$$
demuestre que $|z(t) - y(t)|$ crece a lo más de forma exponencial.

5. Demuestre el siguiente resultado de análisis:

   > Sea E un espacio vectorial normado y completo, $S \subset E$ no vacío y $f : S \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Suponga que $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en S. Entonces $\{f(p_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Fecha de entrega: Febrero 10, 2011 en clase.