CIMAT

90EDO01 — Ecuaciones Diferenciales Ordinarias — Febrero 10, 2011

Tarea 3

1. (a) Determine el intervalo abierto de máxima definición de la solución al problema de valor inicial

$$x' = \frac{1}{x}, \quad x(0) = 1.$$

   (b) ¿Cuál es el intervalo de máxima definición?

   Explique sus resultados con respecto al Teorema de Extensión.

2. Proporcione los detalles de la demostración del colorario obtenido a partir del Teorema de Extensión.

3. Considere la ecuación $x' = t$ y construya la familia de soluciones $t \mapsto \varphi(t, x)$ tales que $\varphi(0, x) = x$ para $x \in \mathbb{R}$. ¿Define $\{\varphi_t\}$ un flujo? Explique.

4. Sea $W \subset \mathbb{R} \times E$ no vacío. Decimos que una función $f : W \to E$ dada por $(t, x) \mapsto f(t, x)$, es *Lipschitz en* x si existe una constante $K > 0$ tal que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K|x_1 - x_2|,$$

   para toda $(t, x_1), (t, x_2) \in W$. Verifique si la siguiente función es Lipschitz en la variable x sobre el conjunto indicado ($E = \mathbb{R}$):

$$f(t, x) = t\sqrt{x}, \quad \text{con} \quad W = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}.$$

5. Sean E espacio vectorial normado completo, $W \subset \mathbb{R} \times E$ abierto, no vacío, $f : W \to E$ continua y $(t_0, x_0) \in W$ fijo. Suponga que f es Lipschitz en x. Suponga que *existen* un intevalo abierto no vacío $J \subset \mathbb{R}$, con $t_0 \in J$, y una solución $x : J \to E$ continua tal que para toda $t \in J$, $(t, x(t)) \in W$ y satisface

$$x' = f(t, x), \quad \text{con} \quad x(t_0) = x_0.$$

   Demuestre que dicha solución es única.

Fecha de entrega: Febrero 17, 2011 en clase.