CIMAT

90EDO01	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	Marzo 3, 2011

Tarea 5

1. Encuentre una matriz fundamental del sistema $\bar{x}' = A(t)\bar{x},\ \bar{x} \in \mathbb{R}^2$, donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & -t-1 \\ 1/t & 1 \end{pmatrix},\ t > 0, \quad \text{y} \quad \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix},$$

es una solución conocida. (*Sugerencia*: Fórmula de Liouville.)

2. A partir de las matrices fundamentales de las ecuaciones $\bar{y}' = J_A\bar{y}$ y $\bar{y}' = J_B\bar{y}$ del ejercicio 4, tarea 4, encuentre matrices fundamentales principales en $t = 0$ para los sistemas $\bar{x}' = A\bar{x}$ y $\bar{x}' = B\bar{x}$.

3. Demuestre que para $A, B \in \mathcal{L}(E)$ arbitrarios y todo entero $k \geq 0$

   (a) $||AB|| \leq ||A||||B||$.

   (b) $||A^k|| \leq ||A||^k$.

4. Concluya la demostración de las propiedades de e^A probando que, para $A, B \in \mathcal{L}(E)$,

   (1) Si B no es singular, entonces $B^{-1}e^AB = e^{B^{-1}AB}$.

   (3) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$. En particular, la imagen del operador *exp* es un subconjunto[1] de $GL(E) = \{T \in \mathcal{L}(E) \mid T \text{ es invertible}\}$.

   (5) $||e^A|| \leq e^{||A||}$.

5. Si A es diagonalizable, demuestre que

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Fecha de entrega: Marzo 10, 2011 en clase.

[1] **Nota:** ¿Será verdad que $Im(exp) = GL(E)$? Punto extra en el examen parcial 1 para la respuesta correcta.