CIMAT

90EDO01 — Ecuaciones Diferenciales Ordinarias — Marzo 10, 2011

Tarea 6

1. Usando la Fórmula de Liouville, demuestre que para toda $A \in M_{n\times n}(E)$, se satisface la identidad $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr} A}$.

2. Encuentre la matriz fundamental principal en $t = 0$ del sistema $\bar{x}' = A(t)\bar{x}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^4$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}, \; a = 4 - \omega^2, \; \omega \in [0,1],$$

mediante un cambio de variable de tal forma que el sistema original se transforme en $\bar{y}' = J_A\bar{y}$, luego calcule e^{tJ_A} y reescriba las soluciones en la variable original $\bar{x}$.

3. Sea A es una matriz $n \times n$ de coeficientes reales.

   (a) Si $A^2 = I$, encuentre una fórmula explícita para e^{tA}.

   (b) Repita el inciso anterior suponiendo ahora que $A^2 = -I$.

   (c) Resuelva el problema de valor inicial

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y suponga que para todo $\lambda \in \mathrm{S}pec(A)$, $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$.

   (a) Si A es semisimple, demuestre que toda solución de $\bar{x}' = A\bar{x}$ es acotada para tiempo $t \to +\infty$.

   (b) Construya un ejemplo de una matriz A no semisimple para la cual existe una solución $t \mapsto \bar{x}(t)$ tal que

$$\lim_{t\to+\infty} |\bar{x}(t)| = \infty.$$

5. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ con todos sus valores propios reales y distintos. Sea $t \mapsto \varphi(t, \bar{x}_0)$ la solución particular del problema de valor inicial $\bar{x}' = A\bar{x}, \bar{x}(0) = \bar{x}_0$. Demuestre directamente que las souciones son continuas con respecto a la condición inicial encontrando constantes $M \geq 0$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que para cada t,
$$|\varphi(t, x_0) - \varphi(t, y_0)| \leq Me^{ct}|x_0 - y_0|.$$

Fecha de entrega: Marzo 17, 2011 en clase.