CIMAT

90EDO01 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Marzo 17, 2011

Tarea 7

1. Dado el sistema lineal

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \bar{x},$$

determine su espacio fase en $\mathbb{R}^3$ indicando las direcciones asintóticas de las soluciones cuando $t \to \pm\infty$.

2. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ y considere la matriz

$$N_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\det(A) & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

   (a) Demuestre que $\operatorname{Spec}(A) = \operatorname{Spec}(N_A)$.

   (b) Defina $\alpha = \det(A)$ y $\beta = \operatorname{tr}(A)$. Encuentre las regiones de estabilidad del origen (pozo, fuente, silla) descritas por los valores propios de A (o N_A) y defina éstas regiones en función a las coordenadas (α, β) sobre $\mathbb{R}^2$. ¿Qué ocurre en las fronteras de dichas regiones?

3. Utilizando la norma euclideana sobre $\mathbb{R}^2$, encuentre los subespacios E^s, E^u y las constantes C, K, a y b como en el Corolario de Hiperbolicidad visto en clase para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Suponga que el origen es un pozo lineal para el sistema $\bar{x}' = A\bar{x}$ con $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Demuestre que el origen es un punto de equilibrio *asintóticamente estable*[1].

5. De un ejemplo de una aplicación $f : E \to E$, clase C^1, no constante, tal que $f(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ para toda solución $x(t)$ de $x' = f(x)$ con condición inicial en una vecindad del origen y *sin que los eigenvalores de* $Df(0)$ *tengan parte real negativa.*

[1] Ver definición a la vuelta.

Definición: Un punto de equilibrio $\hat{x}$ es *asintóticamente estable* para $x' = f(x)$ si para toda vecindad $V = V(\hat{x}) \subset U$, existe una vecindad $V_1 \subset V$, con $\hat{x} \in V_1$ y tal que, toda solución $x(t)$ con condición inicial en V_1 satisface

1. $x(t)$ está definida para todo $t > 0$,
2. $x(t) \in V$ para todo $t > 0$, y
3. $x(t) \to \hat{x}$ cuando $t \to +\infty$.

Fecha de entrega: Marzo 24, 2011 en clase.