CIMAT

90EDO01 | Ecuaciones Diferenciales Ordinarias | Marzo 24, 2011

Tarea 8

1. De un ejemplo de una aplicación $f : E \to E$, clase C^1, no constante, tal que $f(0) = 0$, $\mathrm{Spec}(Df(0)) \subset \{z \mid \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$ y para alguna solución $x(t)$ de $x' = f(x)$ con condición inicial en una vecindad del origen, se cumpla $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$.

2. Enuncie y demuestre un teorema para una fuente no lineal que concluya la inestabilidad de dicho punto de equilibrio.

3. Demuestre el siguiente resultado de inestabilidad

   Sea $\hat{x}$ un punto de equilibrio no lineal, $U = U(\hat{x}) \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $L : U \to \mathbb{R}$ una función clase C^1. Suponga que $L(\hat{x}) = 0$ y $L'(x(t)) > 0$ en $U - \{\hat{x}\}$. Si $L(x_n) > 0$ para alguna sucesión $x_n \to \hat{x}$, entonces $\hat{x}$ es inestable.

4. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales del péndulo con fricción

$$\begin{aligned} \theta' &= \omega, \\ \omega' &= -\sin\theta - A\omega, \end{aligned}$$

   con $A = k/m$. Para los puntos de equilibrio $(n\pi, 0)$ con $n = 0, \pm 1$, determine su estabilidad linearizando (si es suficiente) o utilizando el método directo de Lyapunov. Bosqueje en un mismo diagrama el espacio fase asociado a cada punto e interprete el significado físico de las soluciones.

5. Dada la ecuación diferencial de segundo orden

$$x'' - \varepsilon x' + g(x) = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

   estudie la estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación determinando las condiciones sobre la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para que dichos puntos sean estables ó asintóticamente estables.

Fecha de entrega: Marzo 31, 2011 en clase.