El Grupo de Möbius y
La Métrica Hiperbólica

Emilio Salcedo Martínez

16 de febrero de 2012

Resumen

Uno de los teoremas fundamentales de la teoría de superficies de Riemann es el teorema de uniformización, el cual establece que el cubriente universal de cualquier superficie de Riemann es conformemente equivalente al plano complejo, a la esfera de Riemann o al disco unitario. En particular, cada dominio en la esfera tal que su complemento tiene al menos tres puntos es cubierta por el disco unitario y por lo tanto tiene una estructura hiperbólica natural.

Por esto es importante estudiar la métrica hiperbólica en el disco unitario y sus isometrías que están dadas por difeomorfismos conformes. Entre tales isometrías están las transformaciones de Möbius que estudiaremos con detalle.

1. El grupo de Möbius.

1.1. Definiciones y propiedades.

Denotaremos como $\widehat{\mathbb{C}}$ a la *esfera de Riemann* que es $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Las vecindades de un punto finito son las usuales y las de ∞ son complementos de compactos en $\mathbb{C}$.

Definición 1.1. Sea $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ vecindad de ∞. Decimos que una función $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa en infinito si la función $z \mapsto f(\frac{1}{z})$, $z \neq 0$, $0 \mapsto f(\infty)$, es holomorfa en 0.

Análogamente se define una función holomorfa de cuyo rango es la esfera de Riemann.

Existen tipos especiales de mapeos de la esfera de Riemann que merecen nuestra atención.

1. La *involución conforme* $\mathrm{I}(z) = z^{-1}$.
2. Las *homotecias* $\mathrm{M}_a(z) = az$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
3. Las *traslaciones* $\mathrm{T}_b(z) = z + b$, $b \in \mathbb{C}$.

Estos son difeomorfismos holomorfos de la esfera de Riemann. Entonces cualquier composición de ellas es un difeomorfismos. Éstos forman un grupo bajo la composición. Denotamos a este grupo como $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ y lo llamaremos *grupo de Möbius.*

Observación. Pudimos comenzar definiendo las *transformaciones de Möbius* (o transformaciones lineales fraccionales) como funciones de la forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$ (esta última condición es para evitar que la función sea constante ya que $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$) y tomar el conjunto $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ de todas ellas. Sin embargo tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.2. *Cada trasformación de Möbius es composición de involuciones, homotecias y traslaciones.*

Demostración. Por casos:

Caso 1. $c = 0$. Esto implica $a \neq 0$ y podemos suponer $d = 1$, $az + b = \mathrm{M}_a \circ \mathrm{T}_{b/a}(z)$.

Caso 2. $c \neq 0$, $\frac{az+b}{cz+d} = T_{a/c} \circ \mathrm{M}_{-\frac{ad-bc}{c^2}} \circ \mathrm{I} \circ \mathrm{T}_{d/c}$. □

Observación. La inversa de una transformación de Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es $f^{-1}(w) = \frac{-dw+c}{cw-a}$.

Proposición 1.3. *Dados 3 puntos distintos z_0, z_1, $z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$, y dados otros cualesquiera tres puntos distintos w_0, w_1, $w_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$, existe una única transformación $w \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $w(z_0) = w_0$, $w(z_1) = w_1$, $w(z_2) = w_2$.*

Demostración. Basta probar que cualesquiera 3 puntos distintos puede ser mapeados a 0, 1 e ∞ bajo una transformación de Möbius, pues si $f \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ manda z_0, z_1, z_2 a 0, 1 e ∞ y $g \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ manda w_0, w_1, w_2 a 0, 1 e ∞, la función es $w = g^{-1} \circ f$.

Hacemos

$$f(z) = \frac{z - z_0}{z - z_2} \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_0}$$

y esta función cumple con la condición deseada.

Para la unicidad hay que observar que si f y g mandan z_0, z_1, z_2 a 0, 1 e ∞, entonces $h = f \circ g^{-1}$ fijan 0, 1 e ∞. Como ∞ va a ∞, necesariamente $h(z) = az + b$. Como $h(0) = 0$, $b = 0$ y como 1 va a 1, $h = Id$ y $f = g$. $\square$

Así, una transformación de Möbius queda determinada por la imagen de cualesquiera tres puntos distintos. Pero aún más. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los círculos euclidianos en $\widehat{\mathbb{C}}$, es decir, todos los círculos y rectas en $\mathbb{C}$. Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.4. *Sea $f \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$. Entonces $f(C) \in \mathcal{C}$ para cada $C \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Basta probarlo para la involución, homotecias y traslaciones. Para las dos últimas es claro así que sólo se probará para la primera.

Consideremos un círculo que no pasa por ∞. Tiene ecuación $|z - a|^2 = r^2$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. La imagen del círculo bajo la involución $w = 1/z$ son los puntos que satisfacen:

$$|1/w - a|^2 = r^2 \Rightarrow |1 - aw|^2 = r^2|w|^2,$$

esto es

$$\begin{aligned} 0 &= |1 - aw|^2 - r^2|w|^2 \\ &= (1 - aw)(\overline{1 - aw}) - r^2|w|^2 \\ &= (|a|^2 - r^2)|w|^2 - aw - \overline{aw} + 1 \\ &= (|a|^2 - r^2)(u^2 + v^2) - 2\,\text{Re}(a)u + 2\,\text{Im}(a)v + 1 \end{aligned}$$

donde $w = u + iv$. La última ecuación es la ecuación de una recta si $r = |a|$ y de un círculo si $r \neq |a|$.

Consideremos ahora la ecuación general de una recta $Ax + By = C$ donde $z = x + iy$, su imagen bajo $w = u + iv = 1/z$ son los puntos que satisfacen:

$$A\frac{u}{|w|^2} - B\frac{v}{|w|^2} = C \Rightarrow Au - Bv = C(u^2 + v^2)$$

De aquí que si $C \neq 0$ obtenemos la ecuación de un círculo; y si $C = 0$, una recta que pasa por el origen. $\square$

A veces es útil considerar un grupo más grande: El grupo de los difeomorfismos conformes de la esfera de Riemann. Para esto basta agregar al conjunto de generadores la *inversión geométrica*

$$\bar{\mathrm{I}}(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}.$$

Notemos que este es un difeomorfismo que invierte la orientación y que fija todo punto de la frontera $\partial\mathbb{D}$ del disco unitario $\mathbb{D}$. Si $C \in \mathcal{C}$ y $\phi \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ manda $\partial\mathbb{D}$ en C, entonces $\bar{\mathrm{I}}_C(z) = \phi \circ \bar{\mathrm{I}} \circ \phi^{-1}(z)$ es decir, si C es un círculo de radio r y centro α podemos tomar $\phi(z) = rz + \alpha$ y obtenemos $\bar{\mathrm{I}}_C(z) = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{\alpha}} + \alpha$; y si C es una recta que pasa por un punto α y hace un ángulo θ con el eje real, podemos tomar $\phi(z) = e^{i\theta}z + \alpha$ y obtenemos la *reflexión* $\bar{\mathrm{I}}_C(z) = e^{2i\theta}(\bar{z} - \bar{\alpha}) + \alpha$. Claramente $\bar{\mathrm{I}}_C$ es la inversión geométrica con respecto al círculo C.

Proposición 1.5. *Toda trasformación de Möbius es la composición de dos inversiones.*

Demostración. Basta probarlo para los generadores. Notemos que $\overline{\mathrm{M}}_1(z) = \overline{z}$ es una reflexión con respecto al eje real, pero lo podemos ver como un inversión generalizada con respecto al círculo $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, o si se prefiere como un difeomorfismo conforme. Luego $\mathrm{I}(z) = \overline{\mathrm{M}}_1 \circ \bar{\mathrm{I}}$. Del mismo modo, las funciones $\overline{\mathrm{M}}_a(z) = a\overline{z}$ y $\overline{\mathrm{T}}_b(z) = \overline{z} + b$ son difeomorfismos conformes y $\mathrm{M}_a = \overline{\mathrm{M}}_a \circ \overline{\mathrm{M}}_1$, $\mathrm{T}_b = \overline{\mathrm{T}}_b \circ \overline{M}_1$. $\square$

El grupo $\mathrm{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ puede ser identificado con $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

Pero si una matriz es multiplicada por un número complejo, no afecta su correspondiente transformación de Möbius, así que podemos tomar en cuenta sólo las matrices con determinante 1:

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

y este mapeo es de hecho un homomorfismo de grupos con kernel $\{-I, I\}$. Así, $\mathrm{Möb}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{-I, I\} = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}I$.

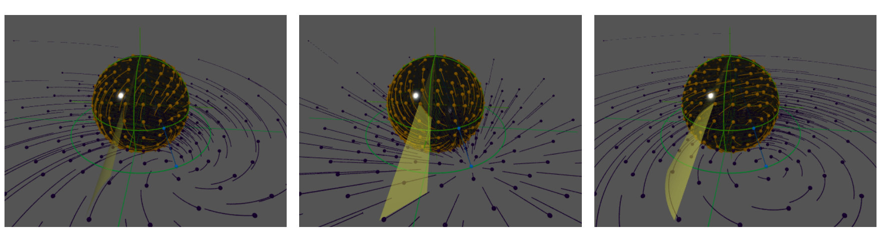
1.2. Dinámica de las transformaciones de Möbius.

La dinámica de las transformaciones de Möbius es bastante sencilla. Sólo tenemos dos posibilidades para puntos fijos: una transformación de Möbius tiene por lo menos uno y a lo más 2 puntos fijos. Pues si queremos resolver la ecuación $\frac{az+b}{cz+d} = z$, llegamos a una ecuación cuadrática. Supongamos que $\phi \in \mathrm{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ tiene dos puntos fijos. Tomemos otra transformación de Möbius ψ tal que mande los puntos fijos a 0 e ∞. Entonces la transformación $\psi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1}$ tiene como puntos fijos 0 e ∞ y por tanto tiene la forma $z \mapsto az$, donde $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Si $|a| \neq 1$ entonces un punto fijo es atractor y el otro repulsor y cualquier orbita converge al atractor (repulsor) bajo iteraciones positivas (negativas). Estos mapeos son llamados *loxodrómicos* (figura 1a) e *hiperbólicos* si a es real (figura 1b).

Si $|a| = 1$, entonces las transformación de Möbius es una rotación y tenemos dos casos: Las órbitas son periódicas si a es una raíz de la unidad o cada una es densa en un círculo si no es raíz de la unidad. Éstos mapeos son llamados *elípticos* (Figura 1c).

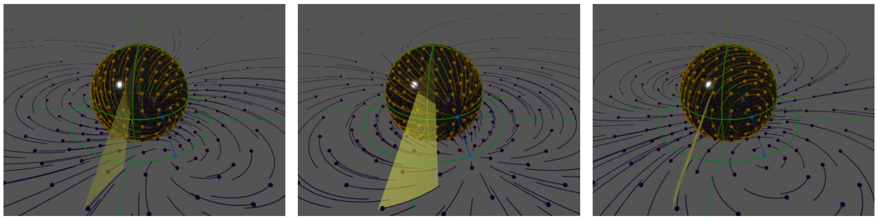
Ahora, si sólo un punto es periódico, podemos escoger ψ de tal manera que el punto fijo sea enviado a ∞ y que $\psi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1}$ sea la traslación $z \mapsto z + 1$. En este caso todas las órbitas serán asintóticas al punto fijo bajo las iteraciones positivas y negativas. Tales mapeos son llamados *parabólicos*.



(a) Loxodrómico. (b) Hiperbólico. (c) Elíptico.

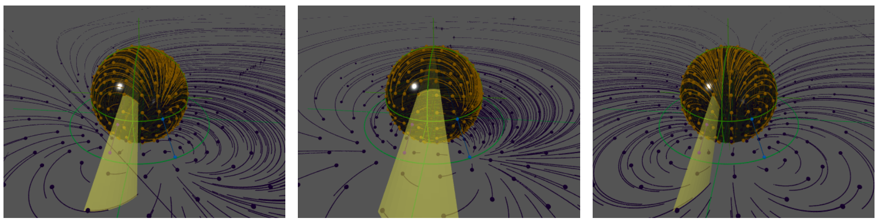
Figura 1: Infinito un punto fijo.

Sea $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ el semi-plano superior. Denotamos por $\mathrm{Möb}(\mathbb{D})$ ($\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$) el subgrupo de $\mathrm{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ que preserva $\mathbb{D}$ ($\mathbb{H}$). La transformación de Möbius $\mathrm{F} = \frac{i-z}{i+z}$ es un difeomorfismo holomorfo de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{H}$. Más aún $\mathrm{F}\,\mathrm{Möb}(\mathbb{D})\,\mathrm{F}^{-1} = \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ y los dos subgrupos



(a) Loxodrómico. (b) Hiperbólico. (c) Elíptico.

Figura 2: Puntos fijos diametralmente opuestos.



(a) Loxodrómico. (b) Hiperbólico. (c) Elíptico.

Figura 3: Puntos fijos en cualquier lugar.

son conjugados[1]. Para cada $z \in \mathbb{D}$ ($z \in \mathbb{H}$) denotamos por $\mathcal{D}_z$ ($\mathcal{H}_z$) al conjunto de círculos en $\mathcal{C}$ que son ortogonales a la frontera de $\mathbb{D}$ ($\mathbb{H}$) y que contienen al punto z. En particular, $\mathcal{D}_0$ es el conjunto de todas las líneas rectas que pasan por el origen. Es claro que la función F induce una biyección entre $\mathcal{D}_z$ y $\mathcal{H}_z$.

Proposición 1.6. *Los siguientes enunciados son ciertos.*

I. *Dados círculos $C_i \in \mathcal{D}_{z_i}$, $z_i \in \mathbb{D}$, $i = 1, 2$, existen exactamente dos elementos de* $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ *que mandan C_1 en C_2 y z_1 en z_2. Si $z_1 = z_2$ y $C_1 = C_2$ entonces una de ellas es la identidad y la otra permuta el punto de intersección de C_1 con la frontera de $\mathbb{D}$.*

II. *Si $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es cualquier automorfismo de $\mathbb{D}$, entonces $\psi \in \text{Möb}(\mathbb{D})$.*

III. *La inversión con respecto a cualquier círculo ortogonal a $\partial\mathbb{D}$ manda $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$. Cualquier elemento de* $\text{Möb}(\mathbb{D})$ *es composición de tales inversiones.*

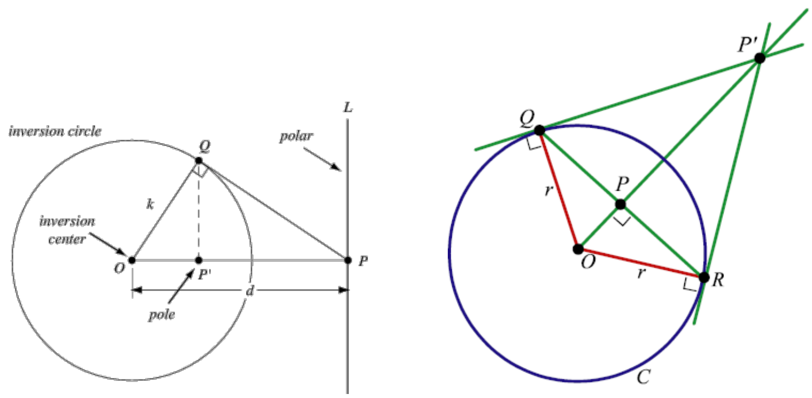
Demostración. Sea $\{z_i^+, z_i^-\}$ la intersección de C_i con la frontera de $\mathbb{D}$. La transformación de Möbius que manda los puntos z_1^-, z_1, z_1^+ a z_2^-, z_2, z_2^+ respectivamente, mapea C_1 en C_2 y $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$ pues como es conforme, manda $\partial\mathbb{D}$ a un círculo que intersecta a C_2 en z_2^- y z_2^+ y preserva ángulos, sólo hay una posibilidad: $\partial\mathbb{D}$. Finalmente como un punto del interior va a otro tenemos que $\mathbb{D}$ es mapeado a $\mathbb{D}$. La transformación de Möbius que manda z_1^-, z_1, z_1^+ a z_2^+, z_2, z_2^- respectivamente, tiene las mismas propiedades y queda probada la primera parte de la proposición.

Las rotaciones son elementos de $\text{Möb}(\mathbb{D})$ que fijan 0. Por otro lado, por el lema de Schwarz, cualquier automorfismo que fije el origen debe ser una rotación. Ahora, si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es un automorfismo entonces, por la primera parte de la proposición, existe $\phi \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ tal que $\phi(f(0)) = 0$. Luego $\phi \circ f$ es una rotación y queda demostrada la segunda parte.

Consideremos el subgrupo $\text{Inv}(\mathbb{D}) \leq \text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ generado por todas las inversiones sobre los círculos que son ortogonales a $\partial\mathbb{D}$. Una rotación de ángulo θ con respecto al origen es la composición de la conjugación compleja y una inversión con respecto línea recta que pasa por el origen con ángulo $\theta/2$. (En general, la composición de dos reflexiones en rectas que se intersectan es una rotación). Luego toda rotación del origen está en $\text{Inv}(\mathbb{D})$. Ahora, notemos que si $p \in \mathbb{D}$, existe una inversión que manda el origen a p. En efecto, consideremos la

[1] Este resultado se probó el semestre pasado y la demostración se puede encontrar en [6].

línea recta L que pasa por p y ortogonal a la línea recta que une p con el origen; la línea L intersecta $\partial\mathbb{D}$ en dos puntos, p' y p''. Si C es el círculo que pasa por p' y p'' y es ortogonal a $\partial\mathbb{D}$, entonces el origen y el punto $\overline{p}$ se mapean uno a otro por $\bar{\mathrm{I}}_C$. Luego, si $\phi \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ y si $p = \phi(0)$, tenemos que $\bar{\mathrm{I}}_C \circ \phi$ fija el origen, y si la componemos con la conjugación $\overline{\mathrm{M}}_1$ es una transformación de Möbius y por el lema de Schwarz debe ser entonces una rotación ψ. Así $\phi = \bar{\mathrm{I}}_C \circ \overline{\mathrm{M}}_1 \circ \psi$ pero ψ ya era composición de elementos de $\text{Inv}(\mathbb{D})$, y como ϕ fue arbitrario, $\text{Inv}(\mathbb{D}) = \text{Möb}(\mathbb{D})$. $\square$



(a) Inversión de un punto fuera del círculo.

(b) Inversión de un punto dentro del círculo.

Figura 4: Inversión P' de un punto P.

2. Métrica Hiperbólica.

Definición 2.1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto. Una *métrica Riemanniana* en U es una función que asocia cada $z \in U$ un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_z$ de $\mathbb{C}$ tal que si X, $Y : U \to \mathbb{C}$ son campos vectoriales C^∞, entonces $z \mapsto \langle X(z), Y(z) \rangle_z$ es una función C^∞.

Definición 2.2. La *longitud* de una función suave a trozos $\gamma : [0, 1] \to U$ está definida por

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|_{\gamma(t)} dt,$$

donde $|v|_z = \sqrt{\langle v, v \rangle_z}$ es la norma del vector v en el punto z.

Dada una métrica Riemanniana en un abierto U, el área del cuadrado unitario con vértices 0, 1, $i + 1$, i con respecto al producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_z$ en el punto $z = x + iy$ es igual a

$$\sigma(x, y) = \sqrt{\langle 1, 1 \rangle_z \langle i, i \rangle_z - (\langle 1, i \rangle_z)^2}$$

y entonces el área de un dominio $D \subset U$ es

$$A(D) = \iint_D \sigma(x, y) dx dy.$$

Decimos que la métrica Riemanniana es *conforme* si, para cada z, $\langle v, w \rangle_z = (\rho(z))^2 \langle v, w \rangle$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno euclideano de $\mathbb{C}$ y ρ es una función positiva C^∞. En este caso, la longitud de una curva está dada por

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \rho(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

y el área de una región $D \subset U$ está definida como

$$A(D) = \iint_D \rho^2 dxdy.$$

En este punto introducimos una notación. Escribimos $|dz| = |\gamma'(t)|dt$. Ahora, podemos escribir $\ell(\gamma)$ como

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma \rho(z)|dz|.$$

Definición 2.3. Si una curva tiene longitud mínima entre todas las curvas suaves a trozos con los mismos puntos inicial y final, entonces es una *geodésica* de la métrica.

Más generalmente, una geodésica es una curva que satisface esta propiedad en cada uno de sus puntos, i.e., para cada t_0 existe $\epsilon > 0$ tal que $\gamma|_{[t_0,t_0+\epsilon]}$ tiene distancia mínima entre todas las curvas suaves a trozos con los mismos puntos inicial y final.

Se puede probar que las geodésicas son soluciones de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden[2]. Por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales se sigue que dado $z \in U$ y un vector $v \in \mathbb{C}$ existe una única geodésica que pasa por z y tal que si vector tangente es v.

Una *isometría* es un difeomorfismo $f : U \to U$ tal que $\langle v, w\rangle_z = \langle Df(z)v, Df(z)w\rangle_{f(z)}$ para cada $z \in U$. Es claro que una isometría preserva la longitud de curvas,

$$\begin{aligned}
\ell(f(\gamma)) &= \int_0^1 |(f \circ \gamma)'(t)|_{f(\gamma(t))} dt \\
&= \int_0^1 |(Df(\gamma(t))(\gamma'(t))|_{f(\gamma(t))} dt \\
&= \int_0^1 |\gamma'(t)|_{\gamma(t)} dt \\
&= \ell(\gamma)
\end{aligned}$$

y por lo tanto manda geodésicas en geodésicas. También preserva el área de las regiones. El estudio de las métricas y sus propiedades, como la curvatura, son propiamente estudiadas por la geometría diferencial pero diremos unas palabras aquí.

La curvatura de la métrica conforme inducida por $\rho(z)|dz|$ es una función $K : U \to \mathbb{R}$ que está dada por la fórmula

$$K(z) = -\left[\frac{2}{\rho(z)}\right]^2 \partial\overline{\partial} \log(\rho(z)).$$

Un resultado fundamental en geometría diferencial es el teorema de Gauss-Bonnet [8], el cual establece que la función real valuada $K(z)$, tiene la propiedad de que para cada triangulo geodésico Δ con ángulos internos α, β, γ se tiene

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint_\Delta K d\sigma$$

donde $d\sigma$ es el elemento de área de la métrica. Finalmente, decimos que la métrica es *completa* si cada geodésica tiene longitud infinita.

Teorema 2.4 (Plano hiperbólico)**.** *Existe una métrica Riemanniana en $\mathbb{D}$ tal que su grupo de isometría coincide con el grupo de difeomorfismos conformes de $\mathbb{D}$. Tal métrica es completa y conforme y tiene curvatura constante negativa. Existe una única tal métrica con curvatura -1. Las geodésicas de esta métrica son los círculos ortogonales a la frontera de $\mathbb{D}$.*

[2] Si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ las ecuaciones son $\frac{d^2\gamma_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}(\gamma) \frac{d\gamma_i}{dt} \frac{d\gamma_j}{dt} = 0$ donde $\Gamma^k_{ij} : U \to \mathbb{R}$ son ciertas funciones suaves. Esto se puede encontrar con detalle en [7].

Demostración. Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota cualquier producto interno en $\mathbb{C}$ que preserva rotaciones y reflexiones con respecto al eje real ($z \mapsto \overline{z}$) entonces $\langle a+ib, x+iy\rangle = \langle a-ib, x-iy\rangle$ implica que $\langle 1,i\rangle = 0$ y si $\langle a+ib, x+iy\rangle = \langle ia-b, ix-y\rangle$ implica que $\langle 1,1\rangle = \langle i,i\rangle$. Luego $\langle\cdot,\cdot\rangle$ debe ser un múltiplo positivo del producto interno euclideano.

En primer lugar, cualquier métrica Riemanniana en $\mathbb{D}$ que tiene el grupo conforme como grupo de isometrías debe inducir un producto interno en el origen el cual es un múltiplo positivo del producto interno euclideano. Por otro lado, sea $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ cualquier múltiplo positivo del producto euclideano. Cualquier automorfismo del disco unitario se ve como $\phi(z) = e^{i\theta}\frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}$ [6]. Podemos definir un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_z$ por $\langle v,w\rangle_z = \langle(\phi^{-1})'v, (\phi^{-1})'w\rangle_0$ y por la invarianza de $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ bajo rotaciones no depende de la elección de ϕ. Es suave pues si X e Y son dos campos vectoriales en U, la función $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $z \mapsto \langle X(z), Y(z)\rangle_z$ está dada por la ecuación

$$f(z) = \frac{1}{1-|z|^2}\langle X(z), Y(z)\rangle_0 = \frac{m}{1-|z|^2}\langle X(z), Y(z)\rangle, \tag{1}$$

para algún $m > 0$. Esto prueba la métrica es conforme.

Por lo tanto esto define una métrica Riemanniana tal que todos los difeomorfismos conformes de $\mathbb{D}$ son isometrías. Como el grupo de isometrías actúa transitivamente, i.e. para cada z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$ existe $\phi \in \mathbb{D}$ tal que $\phi(z_1) = z_2$, se sigue que la curvatura de la métrica es constante. Del teorema de unicidad de las geodésicas se sigue que cualquier curva que es el conjunto de puntos fijos de una involución isométrica debe ser una geodésica. En efecto, sea f una involución isométrica, i.e. $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$, y sea C una curva de puntos fijos de f. Si C no es geodésica, existe una geodésica γ diferente de C que es tangente a C en algún punto $z \in C$ pero entonces $f(\gamma)$ es diferente de γ y es también una geodésica con el mismo vector tangente lo cual es una contradicción. Ahora, cualquier círculo ortogonal a $\partial\mathbb{D}$ es el conjunto de puntos fijos de la correspondiente inversión, la cual es una involución isométrica de la métrica. Luego cada círculo de esa forma es una geodésica. Por otro lado, dado $z \in \mathbb{D}$ y cualquier vector $v \in \mathbb{C}$, existe un círculo $C \in \mathcal{D}_z$ que es tangente a v. Luego estos círculos son todas las geodésicas. Más aún, de la ecuación (1) vemos que las geodésicas son infinitas.

Ahora, consideremos tres puntos distintos en la frontera de $\mathbb{D}$ y las geodésicas que conectan cada par (Figura 5). Esto da un triángulo geodésico con vértices al infinito y ángulos internos igual a cero. Perturbando las geodésicas un poco obtenemos un triángulo geodésico con vértices cerca de infinito y ángulos internos cercanos a cero. Como la curvatura de la métrica es constante, obtenemos de la fórmula del teorema de Gauss-Bonnet que la curvatura debe ser negativa.

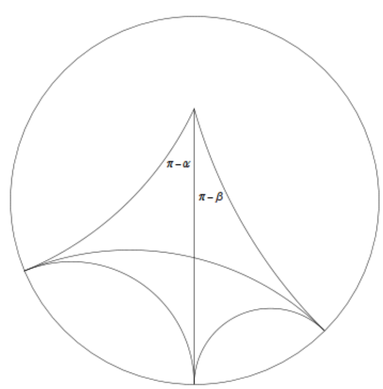


Figura 5: Triángulo geodésico.

Por último, notemos que hemos construido métricas que dependen de un parámetro $m > 0$ y todas tienen las mismas geodésicas. Si fijamos un triángulo geodésico Δ con ángulos internos α, β, γ tenemos que $\alpha + \beta + \gamma - \pi = K(m)A(m)$, donde $K(m)$ es la curvatura de la métrica dada por el valor m del parámetro y $A(m)$ es el área del triángulo Δ. Como la longitud de un vector en la métrica correspondiente al valor m es $\sqrt{m}$ veces la longitud del mismo vector en la métrica correspondiente a $m = 1$, tenemos que $A(m)$ crece de manera lineal con m. Entonces existe un valor único m tal que $K(m) = -1$. $\square$

La métrica construida en la demostración es llamada la *métrica hiperbólica* o la *métrica de Poincaré*. Como $\mathbb{H}$ es difeomorfo a $\mathbb{D}$ vía una transformación de Möbius, existe una única métrica Riemanniana en $\mathbb{H}$ para la cual dicha transformación de Möbius es una isometría. Ésta es llamada la métrica de Poincaré en $\mathbb{H}$.

Terminamos con otra versión del lema de Schwarz.

Lema 2.5 (Lema de Schwarz)**.** *Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es un mapeo holomorfo, entonces f estrictamente contrae la métrica hiperbólica o es una isometría.*

Demostración. Supongamos que f no es isometría. Sea $z \in \mathbb{D}$ y $v \in \mathbb{C}$ $v \neq 0$. Debemos probar que $|f'(z)v|_{f(z)} < |v|_z$. Si $f(z) = z = 0$ entonces es el clásico lema de Schwarz. Si no, sean ϕ y ψ automorfismos de $\mathbb{D}$ tales que $\phi(0) = z$ y $\psi(f(z)) = 0$. Ahora, aplicamos el clásico lema de Schwarz a $\psi \circ f \circ \phi$ y usamos el hecho que ϕ y ψ son isometrías. $\square$

A. Apéndice.

Ya sabemos que existe una métrica Riemanniana en el disco unitario con curvatura constante -1, pero no se especifica una fórmula explícita de la distancia. En la demostración del Teorema 2.4 vimos que de hecho tal métrica era conforme, con $\rho(z) = \frac{m}{1-|z|^2}$ para alguna $m > 0$. En algunos textos, primero se define una métrica en $\mathbb{D}$ y a partir de ahí se construye una distancia hiperbólica como veremos a continuación. Sólo se enunciarán los teoremas y proposiciones pudiéndose consultar las demostraciones en [5]

Definición A.1. El *plano hiperbólico* es el disco $\mathbb{D}$ con una métrica

$$\rho(z)|dz| = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Esta métrica induce una distancia hiperbólica de la siguiente manera. Primero se define la longitud de una curva γ como antes

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma \rho(z)|dz| = \int_a^b \rho(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$$

y luego definimos la distancia entre dos puntos z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$ como

$$d(z_1, z_2) = \inf_\gamma \ell(\gamma)$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas suaves a trozos que unen z_1 con z_2.

Notamos que el m necesario es 2. Y de hecho, aplicando la definición de curvatura dada anteriormente y haciendo los cálculos se llega a que $K(z) = -1$ para cada $z \in \mathbb{D}$.

Teorema A.2. *Para cualquier función holomorfa $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) f es un automorfismo conforme de $\mathbb{D}$;

(b) f es una isometría de la métrica ρ;

(c) f es una isometría de la distancia d.

Observación. Se probó este teorema por partes en las tareas del curso pasado. Para referencia veáse [5] o [6].

Teorema A.3. *La distancia hiperbólica $d(z,w)$ en $\mathbb{D}$ está dada por*

$$d(z,w) = \log \frac{1+p(z,w)}{1-p(z,w)} = 2\tanh^{-1} p(z,w),$$

donde la distancia pseudo-hiperbólica p está dada por

$$p(z,w) = \left| \frac{z-w}{1-z\overline{w}} \right|.$$

De la demostración del teorema 2.4 deducimos que las geodésicas con precisamente los segmentos de círculos que son ortogonales a $\partial\mathbb{D}$. El siguiente teorema nos dice que d es aditiva a lo largo de geodésicas y que p nunca lo es.

Teorema A.4. *Si u, v, $w \in \mathbb{D}$ son tres puntos distintos que están sobre una misma geodésica (en ese orden) entonces $d(u,w) = d(u,v) + d(v,w)$. Si u, v, $w \in \mathbb{D}$ son cualesquiera tres puntos distintos siempre se tiene $p(u,w) < p(u,v) + p(v,w)$.*

Hasta ahora siempre habíamos considerado los abiertos en $\mathbb{D}$ con la topología inducida de $\mathbb{R}^2$, pero la métrica induce otra topología en el disco unitario. Sin embargo, afortunadamente tenemos el siguiente teorema.

Teorema A.5. *La topología inducida por d en $\mathbb{D}$ coincide con la topología euclideana. El espacio $\mathbb{D}$ con la distancia d es un espacio métrico completo.*

Por último, damos un teorema cuya demostración se puede encontrar en [3] y que utiliza, entre otras cosas, el teorema del mapeo de Riemann y el principio de reflexión de Schwarz.

Teorema A.6. *Si $D = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ es la esfera con tres agujeros, entonces el cubriente universal de D, D^{∞}, es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$.*

Referencias

[1] Edson de Faria and Wellington de Mello, *Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics.

[2] Anderson, J.W., *Hyperbolic Geometry*, 2nd. ed., Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer, 2005.

[3] Carleson, L. and Gamelin, T. *Complex Dynamics*. Universitext.

[4] Gamelin, Theodore W. *Complex Analysis*. Springer.

[5] A.F. Beardon and D. Minda. *The hyperbolic metric and geometric function theory*. Proceedings of the International Workshop on Quasiconformal Mappings and their Applications.

[6] Elias M. Stein and Rami Shakarchi *Complex Analysis*. Princeton University Press.

[7] O'Neill, Barret. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press.

[8] Do Carmo, Manfredo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall.