CIMAT

Variable Compleja II

Perla Rebeca Sánchez Vargas.

15-febrero-2012

Algunos Resultados Topológicos

Definición 1 *Un subconjunto* $\mathrm{S} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ *se dice* ***conexo*** *si para todo par de conjuntos disjuntos* A*,* $B \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$*, tales que* $\mathrm{S} = (A \cap \mathrm{S}) \cup (B \cap \mathrm{S})$*, ó bien* $A \cap \mathrm{S} = \emptyset$ *ó* $B \cap \mathrm{S} = \emptyset$*.*

$\mathbb{C}$, $D(z_0, R)$, $\{z \in \mathbb{C} : R_0 < |z| < R_1\}$, son ejemplos de subconjuntos conexos.

Definición 2 *Un subconjunto* $\mathrm{S} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ *se dice* ***conectable por trayectorias*** *si para cada par de puntos* x*,* $y \in \mathrm{S}$ *existe una función continua* $\sigma : [0,1] \to \mathrm{S}$ *tal que* $\sigma(0) = x$ *y* $\sigma(1) = y$*.*

Si $S \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ es conectable por trayectorias entonces es conexo.

Supóngase que S no es conexo, entonces existen U, V $\subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ abiertos disjuntos tales que $S = U \cup V$.

Sean $x \in$ U y $y \in$ V, entonces existe una una función continua

$\sigma : [0,1] \to S$ tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$, luego $x, y \subset \sigma([0,1]) \subset S$, dado que $[0,1]$ es conexo y σ es continua se tiene que $\sigma([0,1])$ es conexo $\sigma([0,1]) = \sigma([0,1]) \cap S = \sigma([0,1]) \cap (U \cup V) = (\sigma([0,1]) \cap U) \cup (\sigma([0,1]) \cap V)$ contradicción, por tanto S es conexo.

Definición 3 *Un subconjunto* $\mathrm{S} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ *se dice* ***localmente conexo (localmente conectable por trayectorias)*** *si para cada* $z \in \mathrm{S}$ *existe una base de vecindades conexas (conectables por trayectorias) de* z*.*

La **componente conexa** de $x \in S$ se define como el subconjunto conexo más grande que contiene a x.

Definición 4 *Sea* $\mathrm{S} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$.
Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \mathrm{S}$ *funciones continuas tales que* $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ *y* $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$*, se dice que* γ_0 *y* γ_1 *son* ***homotópicas*** $(\gamma_0 \sim \gamma_1)$ *si existe una función continua* $h : [0, 1] \times [a, b] \to \mathrm{S}$ *tal que* $h(0, t) = \gamma_0(t)$*,* $h(1, t) = \gamma_1(t)$*,* $h(s, a) = \gamma_0(a)$ *y* $h(s, b) = \gamma_0(b)$ *para todo* $(s, t) \in [0, 1] \times [a, b]$.

La función h es llamada una homotopía entre γ_0 y γ_1.

Definición 5 *Un subconjunto* $\mathrm{S} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ *se dice* ***simplemente conexo*** *si para cada curva cerrada contenida en* S *es homotópica a un punto.*

$\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus (R_\theta \cup \{0\})$, $D(z_0, R)$ son simplemente conexos.
$R_\theta = \{z \in \mathbb{C} : arg(z) = \theta\}$.

Teorema 6 *Un subconjunto* $\mathrm{S} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ *abierto es simplemente conexo si y sólo si su complemento es conexo.*

Demostración :
Véase Function Theory of One Complex Variable, Robert E. Green, Steven G. Krantz.

Observación 7 *Un subconjunto abierto de* $\widehat{\mathbb{C}}$ *es el complemento de un subconjunto conexo y compacto.*

Definición 8 *Una función continua* $f : U \to V$ *se llama* ***homeomorfismo local (hl)****, si para toda* $z \in U$ *existe* $U_z \subseteq U$ *vecindad abierta de* z *tal que* $f(U_z)$ *es abierto y* $f : U_z \to f(U_z)$ *es homeomorfismo.*

Ejemplos:

- Todo homeomorfismo es hl.
- Si $A \in X$ es abierto, la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ es hl.

Definición 9 *Una* ***función cubriente*** $\pi : U \to V$ *es un homeomorfismo local tal que para cada* $w \in V$ *existe* W *vecindad de* w *con la siguiente propiedad:* π *restringida a cada componente conexa de* $\pi^{-1}(W)$ *es un homeomorfismo en* W.

Definición 10 *Un* ***automorfismo cubriente o transformación de deck*** *es un homeomorfismo* $f : U \to U$ *tal que* $\pi \circ f = \pi$.

Observación 11 *Sea* $\pi : U \to V$ *función cubriente.*

Sean f_1, f_2 *automorfismos cubrientes.*

$\pi \circ (f_1 \circ f_2) = (\pi \circ f_1) \circ f_2 = \pi \circ f_2 = \pi$.

La función identidad $id : U \to U$ *es el elemento neutro para cada elemento del subgrupo y también es un automorfismo cubriente,* $\pi \circ id = \pi$.

Dado f *automorfismo cubriente, se tiene que* $\pi \circ f = \pi$ *y existe* f^{-1} *tal que* $f \circ f^{-1} = id$*, luego*

$(\pi \circ f) \circ f^{-1} = \pi \circ f^{-1}$ *de forma que,*

$\pi \circ (f \circ f^{-1}) = \pi \circ f^{-1}$ *así,*

$\pi \circ id = \pi \circ f^{-1}$, $\pi = \pi \circ f^{-1}$.

Además la composición de funciones es asociativa.

Por todo lo anterior el conjunto de automorfismos de una funciones cubrientes es un subgrupo del grupo de homeomorfismos de U.

Si la función cubriente es holomorfa, entonces f *automorfismo es holomorfo ya que si no lo fuese, considere* $\dfrac{d}{dz}(\pi(f(z))) = \pi'(f(z)) \cdot f'(z) = \pi'(z)$.

Como los automorfismos forman un subgrupo, entonces para cada f *automorfismo cubriente* f^{-1} *también es un automorfismo cubriente, por tanto* f^{-1} *es holomorfa de forma que los automorfismos son difeomorfismos holomorfos.*

Ejemplos

1. Un cubriente holomorfo de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ es la función $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por $g(z) = \exp z = e^{Rez}(cos(Imz) + isen(Imz))$ cuyo grupo de automorfismos cubrientes es el grupo de traslaciones

   $\{z \mapsto z + 2k\pi i \in \mathbb{Z}\}$.

   Sea $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $h(z) = z + 2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$ luego se toma

   $(g \circ h)(z) = g(h(z)) = g(z + 2k\pi i) = e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z = g(z)$

2. Un cubriente holomorfo de $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ es la función $\Phi : \mathbb{H} \to \mathbb{D} \setminus \{0\}$ dada por $\Phi(z) = \exp(2\pi i z)$ cuyo grupo de automorfismos cubrientes es el grupo de traslaciones $\{z \mapsto z + k : k \in \mathbb{Z}\}$.

   Sea $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, dada por $h(z) = z + k$, con $k \in \mathbb{Z}$ luego se toma

$(\Phi \circ h)(z) = \Phi(h(z)) = \Phi(z+k) = e^{2\pi iz+2\pi ki)} = e^{2\pi iz}e^{2k\pi i} = e^{2\pi iz} = \Phi(z)$.

3. Un cubriente holomorfo de un anillo $A_R = \{z \in \mathbb{C} : 1 <| z |< R\}$ es la función $\Psi : \mathbb{H} \to A_R$ dada por $\Psi(z) = \exp\{-\frac{2\pi i}{ln\lambda} lnz\}$, donde $\lambda = e^{\pi^2 \setminus lnR}$ y lg $Re^{i\theta} = lnR + i\theta$, cuyo grupo de automorfismos cubrientes es el grupo de homotecías $\{z \mapsto \lambda^k z : k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función holomorfa de grado $d \geq 2$. Sea $C(f) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : f'(z) = 0\}$ el conjunto de puntos críticos de f. Tomando los conjuntos abiertos $V = \widehat{\mathbb{C}} \setminus f(C(f))$ y $U = \widehat{\mathbb{C}} \setminus f^{-1}(f(C(f)))$.

   Luego la restricción de f en U es una función cubriente holomorfa tal que la fibra sobre cada punto tiene exactamente d elementos.

Definición 12 *Sean $\pi : U \to V$ una función cubriente y $f : X \to V$ una función continua. Un* ***levantamiento*** *de f es una función continua $\hat{f} : X \to U$ tal que $\pi \circ \hat{f} = f$.*

Observación 13 *Si $\hat{f}$ es un levantamiento de f y ϕ es un automorfismo cubriente, entonces $\pi \circ (\phi \circ \hat{f}) = (\pi \circ \phi) \circ \hat{f} = \pi \circ \hat{f} = f$, de forma que $\phi \circ \hat{f}$ también es un levantamiento.*

Proposición 14 *Sea $\pi : U \to V$ una función cubriente y sea $f : X \to V$ una función continua con X conexo, si $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2 : X \to U$ son dos levantamientos de f, entonces el conjunto $A = \{x \in X : \hat{f}_1(x) = \hat{f}_2(x)\}$ es igual al $\emptyset$ ó es X.*

Demostración :

Dado que X es conexo basta demostrar que A es abierto y cerrado.

Sea $x \in \bar{A}$, entonces por ser $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$ levantamientos de f se tiene que $\pi(\hat{f}_1(x)) = \pi(\hat{f}_2(x)) = f(x) = y$.

Como π es una función cubriente existe W vecindad abierta de y tal que π restringida a cada componente conexa de $\pi^{-1}(W)$ es un homeomorfismo en W, sean W_1, $W_2 \in \pi^{-1}(W)$ tales que $\hat{f}_1(x) \in W_1$ y $\hat{f}_2(x) \in W_2$, dado que $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$ son continuas se puede encontrar una vecindad N de x tal que $\hat{f}_1(N) \subset W_1$ y $\hat{f}_2(N) \subset W_2$.

Supóngase que $\hat{f}_1(x) \neq \hat{f}_2(x)$, entonces $W_1 \neq W_2$, luego W_1 y W_2 son disjuntos de forma que $\hat{f}_1(x) \neq \hat{f}_2(x)$ en todo N, contradicción, ya que cada vecindad N de x debe intersectar a A.

Teorema 15 *Sea $\pi : U \to V$ una función cubriente.*

i) Si $f : [0,1] \to V$ es una función continua y $\pi(z_0) = f(0)$ entonces existe un levantamiento $\hat{f} : [0,1] \to U$ de f tal que $\hat{f}(0) = z_0$ y es único.

ii) Si $h : [0,1] \times [0,1] \to V$ es una homotopía y $\pi(z_0) = h(0,0)$ entonces existe un levantamiento $\hat{h} : [0,1] \times [0,1] \to U$ de h tal que $\hat{h}(0,0) = z_0$ y es único.

iii) Si X es simplemente conexo, $f : X \to V$ continua y $\pi(z_0) = f(x_0)$ entonces existe un levantamiento $\hat{f} : X \to U$ tal que $\hat{f}(x_0) = z_0$ y es único.

Demostración :

i) Sea $A = \{t \in [0,1] : f|_{[0,t]}$ tiene un levantamiento que empieza en $z_0\}$.

Como $f(0) \in V$ entonces existe una vecindad abierta $N_{f(0)} \subseteq V$ tal que $\pi^{-1}(N_{f(0)})$ es unión disjunta de $\{W_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ y $\pi|_{W_\alpha} : W_\alpha \to N_{f(0)}$ es un homeomorfismo.

f es continua de forma que $f^{-1}(N_{f(0)})$ es un abierto de $[0,1]$ tal que es vecindad de 0, por tanto existe $t \in [0,1]$ tal que $t \in A$, luego $A \neq \emptyset$.

Por lo anterior para cada $t \in A$ existe una vecindad de t que contiene al 0, luego A es abierto y cerrado, como $[0,1]$ es conexo, entonces $A = [0,1]$.

ii) Análogamente a el inciso *i*) se toma $A = \{(t,s) \in [0,1] \times [0,1] : f|_{[0,t]\times[0,s]}$ tiene un levantamiento que empieza en $z_0\}$

iii) Sea $x \in X$, se escoje una trayectoria $\gamma : [0,1] \to X$, tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x$, luego $\pi(z_0) = f(x_0) = f(\gamma(0)) = f \circ \gamma(0)$ por el inciso *i*) para la curva $f \circ \gamma : [0,1] \to V$ existe un levantamiento $\hat{f} : [0,1] \to U$ tal que $\hat{f}(x_0) = z_0$.

Se define $\hat{f}(x)$ como el punto final de $\hat{f}$. Este levantamiento no depende de la curva γ ya que si se toma $\tilde{\gamma}$ otra curva que satisfaga las mismas condiciones, como X es simplemente conexo se tiene que $\gamma \simeq \tilde{\gamma}$, luego $f \circ \gamma \simeq f \circ \tilde{\gamma}$ por el inciso *ii*) esta homotopía tiene un levantamiento. □

Supóngase que i es la inclusión de un conjunto simplemente conexo $X \subset V$, sea $x_0 \in X$, luego $i(x_0) = x_0 \in V$, como π es una una función cubriente entonces existe una vecindad W de x_0 tal que π restringida a cada componente conexa de $\pi^{-1}(W)$ en W es un homeomorfismo, luego existe $z_0 \in U$ tal que $\pi(z_0) = x_0$, por el inciso *iii*) del teorema anterior existe $\phi : X \to U$ tal que $\pi \circ \phi = id$ en X y $\phi(x_0) = z_0$.

De forma que la restricción de π en cada componente conexa de $\pi^{-1}(X)$ es homeomorfo en X. Si además π es holomorfa entonces ϕ también es holomorfa.

Corolario 16 *Sean $\pi_i : U_i \to V_i$, $i : 1, 2$, funciones cubrientes y supóngase que U_1 es simplemente conexo. Si $f : V_1 \to V_2$ es una función continua tal que $f(\pi(z_1)) = \pi(z_2)$ entonces existe una función continua $\hat{f} = U_1 \to U_2$ tal que $\pi_2 \circ \hat{f} = f \circ \pi_1$, $\hat{f}(z_1) = z_2$.*

Demostración :

Considere la función $g = f \circ \pi_1$.

$g : U_1 \to V_2$ es continua y $f(\pi(z_1)) = \pi(z_2) = g(z_1)$, luego por el inciso $iii)$ del teorema anterior existe $\hat{f} : U_1 \to U_2$ tal que $z_2 = \hat{f}(z_1)$ y

$\pi_2 \circ \hat{f} = g = f \circ \pi_1$.

Si $\pi_1 = \pi_2$ y $f = id_V$ entonces $\pi \circ \hat{f} = f \circ \pi = id_V \circ \pi = \pi$, por tanto $\hat{f}$ es un automorfismo cubriente.

Si U es simplemente conexo el grupo de automorfismos actua transitivamente en cada fibra : Si $\pi(z_1) = \pi(z_2)$ entonces existe un automorfismo que mapea z_1 en z_2. Véase Algebraic Topology: An Introduction, W. S. Massey.

Ejemplo

Considere la función cubriente $g(z) = exp(z)$, si $exp(z_1) = exp(z_2)$ entonces se tiene que $z_2 = z_1 + 2k\pi i$, y se sabe que existe un automorfismo cubriente φ tal que $\varphi(z_1) = z_1 + 2k\pi i = z_2$.

Considere la función cubriente $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dada por $h(z) = z^d$, donde su grupo de automorfismos cubirentes es $\{z \mapsto e^{2\pi k i} z : 0 \leq k \leq d\}$. Si $h(z_1) = h(z_2)$, luego se puede encontrar $0 \leq k_0 \leq d$ tal que $z_2 = e^{2\pi k_0 i} z_1$.

Ahora si el dominio del levantamiento no es simplemente conexo, se considera otra forma de ver cuando existe el levantamiento.

Definición 17 *Sea X un espacio topológico conexo y localmente conexo, y sea $x_0 \in X$. Se define el* ***Grupo Fundamental*** *de X $\pi_1(X, x_0)$ con punto base x_0 como el conjunto de clases de homotopía de curvas cerradas con punto final x_0.*

Dadas $f, g : [0, 1] \to X \in \pi_1(X, x_0)$ tales que $f(1) = g(0)$

$\pi_1(X, x_0)$ es un grupo con la operación $*$ dada por,

$$f*g(t)=\begin{cases} f(2t), & \text{si} 0\le t\le \frac{1}{2};\\ g(2t-1), & \text{si} \frac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases}$$

Sean $f_0, f_1, g_0, g_1 : [0,1] \to X$ tales que $f_0 \simeq f_1$ y $g_0 \simeq g_1$ via las homotopías f_t y g_t, si $f_0(1) = g_0(0)$ entonces $f_0 * g_0$ esta bien definida, además $f_t(1) = f_0(1)$ y $g_t(0) = g_0(0)$, luego $f_t(1) = g_t(0)$ de forma que $f_t * g_t$ esta bien definida para todo $t \in [0,1]$ y es una homotopía de $f_0 * g_0$ a $f_1 * g_1$. Por lo anterior la clase de homotopía $[f * g]$ no depende de la elección de f y g.

Una función continua $f : X \to Y$, tal que $f(x_0) = y_0$, induce un homomorfismo de grupos

$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, dada por $f_*(\gamma) = f \circ \gamma$.

Sea $\gamma_0, \gamma_1 \in \pi_1(X, x_0)$, tales que $\gamma_0 \simeq \gamma_1$, entonces existe una homotopía γ_t que va de γ_0 en γ_1, luego $f \circ \gamma_t$ es una homotopía que va de $f \circ \gamma_0$ en $f \circ \gamma_1$, de forma que $f_*[\gamma_0] = [f \circ \gamma_0] = [f \circ \gamma_1] = f_*[\gamma_1]$.

f_* es un homomorfismo ya que

$$f(\gamma_0*\gamma_1(t))=\begin{cases} f\circ\gamma_0(2t), & \text{si} 0\le t\le \frac{1}{2};\\ f\circ\gamma_1(2t-1), & \text{si} \frac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases} = (f\circ\gamma_0)*(f\circ\gamma_1)(t))$$

Teorema 18 *Sea $\pi : U \to V$ una función cubriente y $f : X \to V$ una función continua, donde X, U y V se consideran localmente conexos. Sea $f(x_0) = z_0 = \pi(w_0)$. Entonces existe un levantamiento $\hat{f} : X \to U$ con $\hat{f}(x_0) = w_0$ si y solo si $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset \pi(\pi_1(U, w_0))$.*

Demostración :

Véase Algebraic Topology, Allen Hatcher.

Corolario 19 *Sea $\pi : U \to V$ una función cubriente. Sean $f_i : X \to V$ $i = 1, 2$, funciones continuas tales que $f_1(x_0) = f_2(x_0) = z_0 = \pi(w_0)$. Supóngase que f_1 es homotópica a f_2 con respecto a x_0. Entonces si f_1 tiene un levantamiento de x_0 en w_0 tambien f_2.*

Demostración :

Dado que $f_1 \simeq f_2$, entonces f_{2*} induce el mismo homomorfismo que f_{1*}, luego $f_{2*}(\pi_1(X, x_0)) \subset \pi(\pi_1(U, w_0))$, por el teorema anterior existe $\hat{f} : X \to U$ con $\hat{f}(x_0) = w_0$. □

Sea $V \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ un subconjunto abierto, y sea $z_0 \in V$.

Sea $\tilde{V}$ el conjunto de las clases de homotopías de curvas continuas con punto inicial z_0.

Sea $\pi : \tilde{V} \to V$ la función que asigna el punto final de γ a cada clase de homotopía de la curva γ. Nótese que todas las curvas de una clase de homotopía tienen el mismo punto inicial y final.

Sean $[\gamma]$ la clase de homotopía de γ y z_1 el punto final de γ. Sea Δ un disco en V con centro en z_1. Se toma $\tilde{\Delta}([\gamma])$ como el conjunto de clases de homotopías que empiezan en z_0, pasan por z_1 y continuan en el segmento de z_1 hasta el punto final del Δ, entonces se tiene que π es una biyección entre $\tilde{\Delta}([\gamma])$ y Δ, se toma la topología para $\tilde{V}$ tomando cada $\tilde{\Delta}([\gamma])$ como una vecindad abierta.

Teorema 20 *La función $\pi : \tilde{V} \to V$ es una función cubriente y $\tilde{V}$ es simplemente conexo.*

Bibliografía

[1] Allen Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press 2002.

[2] W. S. Massey, Algebraic Topology: An Introduction, Harcourt, Brace and World 1967.

[3] Robert E. Green, Steven G. Krantz, Function Theory of One Complex Variable, John Wiley and Sons, Inc 1997.