Contracción Hiperbólica

1 Métricas Inducidas

Sean $U, V \subset \mathbb{C}$ abiertos, $\pi : U \to V$ un cubriente clase C^∞. Sea g_ρ la métrica hiperbólica sobre $\mathbb{D}$ y $\rho(z) = 2/(1 - |z|^2)$ su densidad hiperbólica.

Pullback de la métrica
Denotemos por (V, g_V, ρ_V) el abierto V dotado de una métrica Riemanniana g_V de densidad ρ_V. Bajo la acción del cubriente podemos inducir una métrica en U dada por

$$g_U(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \langle \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle_{\tilde{z}} = \langle D\pi(\tilde{z})\tilde{\alpha}, D\pi(\tilde{z})\tilde{\beta} \rangle_z = g_V(D\pi(\tilde{z})\tilde{\alpha}, D\pi(\tilde{z})\tilde{\beta}) \tag{1}$$

para todo $\tilde{z} \in U$ donde $\pi(\tilde{z}) = z$ y vectores $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{C}$, donde $D\pi(\tilde{z})\tilde{\alpha} = \alpha$, $D\pi(\tilde{z})\tilde{\beta} = \beta$. La métrica g_U tiene por densidad

$$\rho_U(\tilde{z}) = |D\pi(\tilde{z})|\rho(\pi(\tilde{z})).$$

Se sigue de (1) que $\pi : (U, g_U) \to (V, g_V)$ es una isometría con respecto a las métricas.

Push forward de la métrica
Dado (U, g_U, ρ_U), supongamos que U es simplemente conexo y los automorfismos del cubriente (esto es, automorfismos $\varphi : U \to U$ C^∞ tales que $\pi\varphi = \pi$) son isometrías de g_U. Es decir, con respecto a la densidad,

$$\rho_U(D\varphi(\tilde{z}))|D\varphi(\tilde{z})| = \rho_U(\tilde{z}).$$

La métrica inducida en V por el cubriente está definida por

$$g_V(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle_z = \langle (D\pi(\tilde{z}))^{-1}\alpha, (D\pi(\tilde{z}))^{-1}\beta \rangle_{\tilde{z}} = g_U(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \tag{2}$$

para todo $z \in V$ y vectores $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. En términos de la densidad, se tiene

$$\rho_V(z) = \frac{\rho_U(\tilde{z})}{|D\pi(\tilde{z})|}.$$

Por (2) y la hipótesis sobre los isomorfismo cubrientes, se sigue que π^{-1} es localmente una isometría de las métricas y la definición de g_V no depende de $\tilde{z}$.

Ejemplo
Sea $(U, g_U) = (\mathbb{D}, g_\rho)$, por lo que $\pi : (\mathbb{D}, g_\rho) \to V$ es el cubriente universal de V. Ya que los automorfismos del cubriente forman un subgrupo de los difeomorfismos conformes y estos son a su vez, isometrías de la métrica hiperbólica, entonces podemos inducir una (única) métrica Riemanniana g_V en V con densidad

$$\rho_V(z) = \frac{\rho(\tilde{z})}{|D\pi(\tilde{z})|} = \frac{2}{|D\pi(\tilde{z})|(1 - |\tilde{z}|^2)}. \tag{3}$$

Llamaremos a g_V la *métrica hiperbólica en* V. Cuando se pueda dotar a un abierto $V \subset \mathbb{C}$ de tal métrica, le llamaremos un *dominio hiperbólico.*

1.1 Lema de Schwarz

Sean $V_1, V_2 \subset \mathbb{C}$ dos dominios hiperbólicos con métricas g_1, g_2 y densidades ρ_1, ρ_2. El siguiente es el Lemma de Schwarz en su versión para dominios hiperbólicos.

Teorema
Si $f : (V_1, g_1) \to (V_2, g_2)$ es holomorfa, entonces f es una contracción con respecto a las métricas, esto es

$$\rho_2(f(z))|f'(z)| \leq \rho_1(z)$$

para todo $z \in V_1$. En particular, si f es una isometría, entonces es también un cubriente.

Demostración: Sabemos que existe un levantamiento holomorfo de f dado por $\hat{f} : (\mathbb{D}, g_\rho) \to (\mathbb{D}, g_\rho)$, donde $f \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \hat{f}$ en $\mathbb{D}$ (ref. notas de Perla). Luego, por el Lema de Schwarz en su versión del disco con la métrica hiperbólica (ref. notas de Emilio) se sigue que para todo $\tilde{z} \in \mathbb{D}$,

$$\rho(\hat{f}(\tilde{z}))|\hat{f}'(\tilde{z})| \leq \rho(\tilde{z}), \tag{4}$$

esto es, $\hat{f}$ es una contracción con respecto a la métrica hiperbólica g_ρ. Si π_j denota el cubrimiento (universal) de cada V_j y definimos $w = f(z)$, $\tilde{z} \in \mathbb{D}$ tal que $\pi_1(\tilde{z}) = z$, luego, existe $\tilde{w} \in \mathbb{D}$ tal que $\pi_2(\tilde{w}) = w$ y $\hat{f}(\tilde{z}) = \tilde{w}$. Notando que

$$|\hat{f}'(\tilde{z})| = |(\pi_2^{-1})'(f(z))||f'(z)||\pi_1'(z)|$$

podemos reescribir la desigualdad en (4) usando (3) para obtener

$$\rho_2(f(z))|\pi_1'(\hat{f}(\tilde{z}))||\hat{f}'(\tilde{z})| \leq \rho_1(z)|\pi_1'(\tilde{z})|.$$

Al reescribir la norma de la derivada de $\hat{f}$ y cancelando las derivadas de π_1 y π_2^{-1} se sigue

$$\rho_2(f(z))|f'(z)| \leq \rho_1(z)|.$$

Finalmente, si f es una isometría entre g_1 y g_2, entonces $\hat{f}$ lo es par g_ρ. Por lo tanto $\hat{f}$ es un difeomorfismo conforme y es invertible. Luego $\pi_2 = f \circ \pi_1 \circ \hat{f}^{-1}$, por lo que f es sobreyectiva y un homeomorfismo local, por lo tanto cubriente. □

2 Transformaciones de Markov

Sean $U, V \subset \mathbb{C}$ abiertos y $f : U \to V$ una función holomorfa. Si se satisfacen

(i) V es un disco topológico (i.e., simplemente conexo, acotado),

(ii) U es la unión finita de d discos topológicos U_j compactamente contenidos en V, y

(iii) $f : U_j \to V$ es un homeomorfismo,

entonces decimos que f es una *transformación de Markov*.

La dinámica de transformaciones de Markov puede describirse totalmente por medio de la *dinámica simbólica* esto es, la dinámica sobre el espacio de sucesiones infinitas

$$\Sigma_d = \{\boldsymbol{a} = a_0 a_1 \ldots \mid a_j \in \{1, 2, \ldots, d\} \text{ para cada } j \geq 0\}$$

dotado con la métrica

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{j \geq 0} \frac{|a_j - b_j|}{2^j}.$$

No es difícil mostrar que d es una métrica para Σ_d, pues claramente satisface $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \geq 0$ y $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Además $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = d(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$. Por último, si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \Sigma_d$ distintos, entonces para cada j

$$|a_j - c_j| \leq |a_j - b_j| + |b_j - c_j|$$

por lo que d satisface la desigualdad del triángulo.

Con esta métrica, un disco abierto D de radio 2^{-m} y centrado en $\boldsymbol{a}$ consiste de todas las sucesiones $\boldsymbol{b}$ que satisfacen $b_j = a_j$ para $j \leq m$. El *shift izquierdo* (o simplemente shift) es una función $\sigma : \Sigma_d \to \Sigma_d$ tal que

$$\sigma(\boldsymbol{a}) = \sigma(a_0 a_1 a_2 \ldots) = a_1 a_2 \ldots$$

El shift es una función continua con respecto a la métrica en Σ_d. Efectivamente, dado $\varepsilon > 0$ y $m > 0$ entero tal que $2^{-m} < \varepsilon$, si definimos $\delta = 2^{-(m+1)}$ se tiene que para todo $\boldsymbol{b}$

tal que $d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) < \delta$, entonces $b_j = a_j$ para $j \leq m+1$. Por lo que $\sigma(\boldsymbol{a})$ y $\sigma(\boldsymbol{b})$ comparten los primeros m dígitos, esto es $d(\sigma(\boldsymbol{a}),\sigma(\boldsymbol{b})) < \varepsilon$.

El siguiente resultado muestra cómo la dinámica de f restringida al conjunto compacto f-invariante

$$J_f = \{z \in U \mid f^n(z) \in U \text{ para todo } n \geq 0\}$$

se conjuga con la acción del shift sobre el espacio Σ_d.

Teorema
Si $f : U \to V$ es una transformación de Markov, entonces existe un homeomorfismo $\varphi : J_f \to \Sigma_d$ tal que $\varphi \circ f = \sigma \circ \varphi$ en J_f.

Demostración: Ya que U y V son discos topológicos, su cubriente universal en $\mathbb{D}$. Por lo que podemos definir métricas hiperbólicas g_U, g_V en los respectivos dominios. Para cada j, el homeomorfismo $f : U_j \to V$ y la inclusión $i : U_j \to V$ son funciones holomorfas sobre dominios hiperbólicos, se sigue del Lema de Schwarz que, con respecto a g_j y g_V

(1) i es una contracción estricta, esto es $\rho_V(i(z))|i'(z)| < \rho_j(z)$ para todo $z \in U_j$,

(2) f es una isometría, es decir $\rho_V(f(z))|f'(z)| = \rho_j(z)$, para todo $z \in U_j$.

De aquí que $f \circ i^{-1} : V \to V$ (definida sólo sobre U_j) es una expansión de la métrica g_V. Luego, podemos encontrar una constante $\lambda_j > 1$ tal que $\lambda_j < |(f \circ i^{-1})(z)| = |f'(z)|$ para todo $z \in U_j$. Si λ denota el mínimo de los λ_j, tenemos $1 < \lambda < |f'(z)|$ para todo $z \in U$.

Para cada sucesión finita $a_0 \dots a_n$ con $a_j \in \{1, 2, \dots, d\}$, definamos el conjunto

$$U_{a_0 \dots a_n} = \{z \in U_{a_0} \mid f^j(z) \in U_{a_j} \text{ para cada } j \leq n\}.$$

Estos conjuntos satisfacen

(a) $U_{a_0 \dots a_n} \subsetneq U_{a_0 \dots a_{n-1}} \subsetneq \dots \subsetneq U_{a_0}$,

(b) $f(U_{a_0 \dots a_n}) = U_{a_1 \dots a_n}$,

(c) $\operatorname{diam}(U_{a_0 \dots a_n}) \leq \lambda^{-n} \operatorname{diam}(U_{a_n})$,

donde el diámetro se define con respecto a la distancia hiperbólica $\rho_V(\cdot,\cdot)$ en V, esto es

$$\operatorname{diam}(U_{a_0 \dots a_n}) = \sup_{z,w \in U_{a_0 \dots a_n}} \rho_V(z,w) = \sup_{z,w \in U_{a_0 \dots a_n}} \inf_\gamma \int_\gamma \rho_V(\zeta)|d\zeta|,$$

donde el ínfimo es tomado sobre toda curva $\gamma \subset U_{a_0 \dots a_n}$ que tiene por puntos extremos z y w.

Los dos primeros incisos son fáciles de demostrar. Para el tercero, se sigue por definición que $U_{a_0\ldots a_n} = U_{a_0} \cap f^{-1}(U_{a_1}) \cap \ldots \cap f^{-n}(U_{a_n})$. Luego $U_{a_0\ldots a_n} \subsetneq f^{-n}(U_{a_n})$ y de las propiedades de la distancia y la definición de diámetro

$$\mathrm{diam}(U_{a_0\ldots a_n}) \leq \mathrm{diam}(f^{-n}(U_{a_n})) \leq \lambda^{-n}\mathrm{diam}(U_{a_n}).$$

Ya que la métrica hiperbólica sobre cualquier dominio hiperbólico es equivalente a la métrica euclideana (Corolario 7.2.1 en [KL]), se sigue que los diámetros euclideanos de $U_{a_0\ldots a_n}$ decrecen a cero cuando $n \to \infty$, por lo que

$$\bigcap_{n\geq 0} U_{a_0\ldots a_n} = \{z_{\boldsymbol{a}}\}, \tag{5}$$

donde, por definición, $f^j(z_{\boldsymbol{a}}) \in U_{a_j}$ para todo $j \geq 0$. Claramente, $z_{\boldsymbol{a}} \in J_f$. Definamos la función *itinerario*

$$\varphi : J_f \to \Sigma_d$$

donde $\varphi(z) = \boldsymbol{a}$ si para cada $j \geq 0$, $a_j = i$ si y sólo si $f^j(z) \in U_i$. Veamos que φ es un homeomorfismo.

Dados $z, w \in J_f$, supongamos que $\varphi(z) = \varphi(w)$. Esto es, para cada j, $f^j(z), f^j(w) \in U_{a_j}$, por lo que $z, w \in U_{a_0\ldots a_n}$ para cada n. Pero $\mathrm{diam}(U_{a_0\ldots a_n}) \to 0$, por lo tanto $z = w$. Esto muestra que φ es inyectiva. La suprayectividad se sigue de (5), pues dada una sucesión $\boldsymbol{a}$, existe un punto, $z_{\boldsymbol{a}}$ que realiza dicha sucesión como itinerario.

Veamos finalmente que φ es continua. Sea $z \in J_f$ con $\varphi(z) = \boldsymbol{a}$. Sea $\varepsilon > 0$ y un entero m tal que $2^{-m} < \varepsilon$. Consideremos los d^{n+1} discos topológicos $U_{b_0\ldots b_n}$ asociados a cualquiera de las posibles sucesiones finitas $b_0 \ldots b_n$. Por definición, todos los discos son disjuntos y $J_f \subset \bigcup U_{b_0\ldots b_n}$. Entre todos estos discos está $U_{a_0\ldots a_n}$ que contiene a z. Por lo que si $w \in J_f$ y su distancia hiperbólica, $\rho_V(z, w)$ es suficientemente pequeña, entonces $|z - w|$ también es pequeña, implicando $w \in U_{a_0\ldots a_n}$. Por lo tanto $\varphi(z)$ y $\varphi(w)$ coinciden en sus primeros $n + 1$ dígitos. De aquí que $d(\varphi(z), \varphi(w)) < 2^{-m} < \varepsilon$.

De forma análoga se demuestra que φ^{-1} es continua.

Dado $z \in J_f$, con $\varphi(z) = \boldsymbol{a}$, se sigue $f(z) \in U_{a_1\ldots a_n}$ para cada n, luego $\varphi(f(z)) = a_1a_2\ldots = \sigma(\varphi(z))$. Por lo tanto $\varphi \circ f = \sigma \circ \varphi$. $\square$

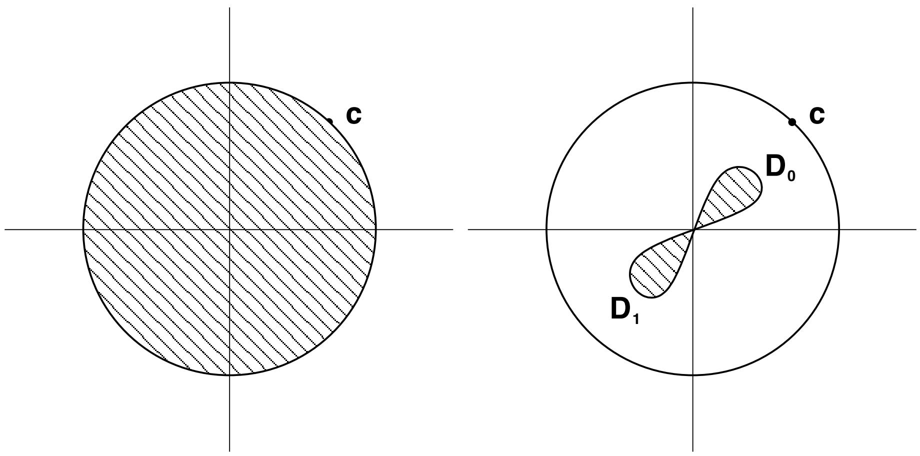
2.1 Dinámica de Polinomios Cuadráticos

Sea $Q(z) = a_0z^2 + a_1z + a_2$ con $a_0 \neq 0$. Todo polinomio cuadrático escribirse en la forma $P_c(z) = z^2 + c$, esto se logra definiendo $P_c = h \circ Q \circ h^{-1}$, donde $h(z) = \alpha z + \beta$ es una transformación afín. Por ello, trabajaremos únicamente con la representación P_c.

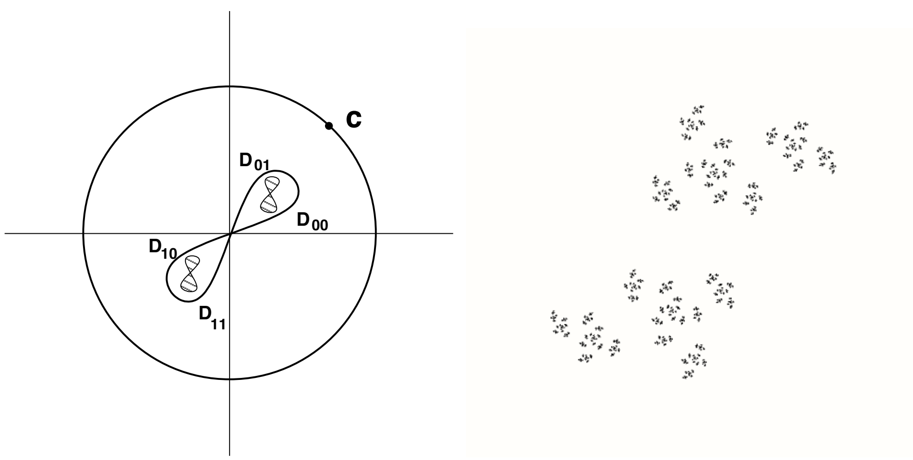
Dado cualquier $c \in \mathbb{C}$, si $|z| > 2$ entonces $|P_c(z)| > |z|$ y por lo tanto $P_c^n(z) \to \infty$. Supongamos que c es un parámetro de norma $|c| > 2$. Definamos el disco $V = \{z \mid |z| < |c|\}$ y sea $U = P_c^{-1}(V)$, el cual es la unión disjunta de dos discos topológicos denotados por D_0 y D_1. Sea

$$J_c = \{z \in U \mid P_c^j(z) \in U \text{ para todo } j \geq 0\}.$$

Como el valor crítico c está en la frontera de V, el conjunto U tiene en su frontera el origen y consiste de dos discos topológicos que son enviados por P_c inyectivamente sobre V (ver la siguiente figura).



De aquí que $J_c \subset D_0 \cup D_1$. Como P_c es una transformación de Markov, se sigue que J_c es homeomorfo a Σ_2 bajo la transformación itinerario φ. De hecho, J_c es homeomorfo al conjunto de Cantor.



References

[dFdM] De Faria, E. & De Melo, W. *Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics.* Cambridge Studies in Advance Mathematics, 115, Cambridge, 2008.

[D] Devaney, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Segunda Edición. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Redwood City, CA, 1989.

[KL] Keen, L. & Lakic, N. *Hyperbolic Geometry from a Local Viewpoint.* London Mathematical Society Student Texts, 68. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.