UNIFORMIZACIÓN DE DOMINIOS SIMPLEMENTE CONEXOS Y ACOTADOS.

PABLO PÉREZ LUCAS

1. Resumen

En este trabajo demostraremos que cualquier subconjunto abierto simplemente conexo y *acotado* del plano, es holomorfamente equivalente al disco unitario. Posteriormente el resultado se extiende para todos los subconjuntos propios abiertos simplemente conexos del plano.

2. Uniformización de dominios simplemente conexos y acotados.

Proposición 1. *Dado $v \in \mathbb{D}$ existe una función holomorfa $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ con un único punto crítico $c \in \mathbb{D}$ tal que $f : \mathbb{D} \setminus \{c\} \to \mathbb{D} \setminus \{v\}$ es una función cubriente de grado 2 y $f(0) = 0$.*

Demostración. Sea $q(z) = z^2$. Considérese una transformación de Möbius $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tal que $\phi(0) = v$. Note que la función $g := \phi \circ q \circ \phi^{-1}$ es tal que $g(v) = v$. Ahora, por la 3-transitividad del grupo de transformaciones de Möbius podemos tomar $w \in \mathbb{D}$ tal que $g(w) = 0$ y otra transformación de Möbius $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tal que $\psi(0) = w$. Finalmente, la función $f := g \circ \psi$ claramente fija a 0, pues $f(0) = g(\psi(0)) = g(w) = 0$ y dado que $q'(\phi^{-1} \circ \psi(\psi^{-1}(v))) = q'(\phi^{-1}(v)) = q'(0) = 0$ se tiene que $f'(\psi^{-1}(v)) = \phi'(q \circ \phi^{-1} \circ \psi(\psi^{-1}(v))) \cdot q'(\phi^{-1} \circ \psi(\psi^{-1}(v))) \cdot [\phi^{-1}]'(\psi(\psi^{-1}(v))) \cdot \psi'(\psi^{-1}(v)) = 0$, es decir, $\psi^{-1}(v)$ es punto crítico de f, la unicidad de este punto crítico se obtiene por la fórmula de Riemann-Hurwitz:

$$n_{\mathbb{D}} - 2 = d(n_{\mathbb{D}} - 2) + r. \tag{1}$$

Donde $n_{\mathbb{D}}$ representa el número de componentes frontera de $\mathbb{D}$, $d = grad(f)$ y r es el número de puntos críticos de f. Para nuestro caso $n_{\mathbb{D}} = 1$ y $d = 2$ por lo que en (1) se tiene que $r = 1$. Además, el valor crítico de f es $f(\psi^{-1}(v)) = g \circ \psi(\psi^{-1}(v)) = g(v) = v$. □

Corolario 1. *Sea $U \subset \mathbb{D}$ un subconjunto abierto simplemente conexo que contiene a 0. Si $U \neq \mathbb{D}$ entonces existe una función holomorfa y univalente (inyectiva) $F : U \to \mathbb{D}$ tal que $F(0) = 0$ y $|F'(0)| > 1$.*

Demostración. Sea $v \in \mathbb{D} \setminus U$ y $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ como en la proposición 1, de esta forma tenemos que $f(0) = 0$ por lo que por el lema de Schwarz tenemos que $|f'(0)| \leq 1$, pero si la igualdad se cumple entonces f es una rotación, es decir $f(z) = kz$ con $|k| = 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Sin embargo, de esto último tenemos que $f'(z) = k \neq 0$ lo cual es una contradicción, pues f tiene un punto crítico, así $|f'(0)| < 1$. Por otro lado, como $f : \mathbb{D} \setminus \{c\} \to \mathbb{D} \setminus \{v\}$ es una función cubriente y $U \subset \mathbb{D} \setminus \{v\}$ es simplemente conexo existe una función holomorfa univalente $F : U \to \mathbb{D}$ tal que $F(0) = 0$ y $f \circ F = I_U$

Date: 08 de febrero de 2012.

(identidad en U). Al derivar vemos que $f'(F(0)) \cdot F'(0) = f'(0) \cdot F'(0) = 1$ y se tiene que $| F'(0) |> 1$, pues $| f'(0) |< 1$. □

Lema 1. *Sea $W \subset \mathbb{C}$ dominio, $f_n : W \to \mathbb{C}$ holomorfas e inyectivas tal que f_n converge uniformemente en subconjuntos compactos de W a una función f_0 entonces f_0 es inyectiva o constante.*

Demostración. Supongamos que f_0 no es inyectiva entonces existen α, $\beta \in W$, $\alpha \neq \beta$ tal que $f_0(\alpha) = f_0(\beta)$. Definimos la función $g_n(z) = f_n(z) - f_n(\alpha)$, observese que $g_n(z) = 0$ si y sólo si $z = \alpha$. Por hipótesis $g_n(z)$ converge uniformemente a $g_0(z) := f_0(z) - f_0(\alpha)$, si $g_0(z) \neq 0$ entonces $g_0(\beta) = 0$, es decicr β es un cero aislado de la función g_0, por lo que podemos tomar $\epsilon > 0$ tal que $g_n(z) \neq 0$ en $D = D(\beta, \epsilon)$, además $g_n(z)$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de W a la función g_0 por lo que por el teorema de Hurwitz (ver[4,p.178]) se tiene que $g_0(z) \neq 0$ ó $g_0(z) = 0$, así, si $g_0 \neq 0$ entonces f_0 es inyectiva y si $g_0 = 0$ entonces f_0 es constante. □

Teorema 1. *Sea $W \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto simplemente conexo y acotado, con $z_0 \in W$. Entonces existe un difeomorfismo holomorfo $\phi : W \to \mathbb{D}$ tal que $\phi(z_0) = 0$. Cualquier otro difeomorfismo holomorfo es la composición de ϕ con una rotación.*

Demostración. Consideremos la familia $\mathcal{F}$ que consiste de todas las funciones holomorfas y univalentes de W en $\mathbb{D}$ que mandan z_0 en 0. Como W es acotado, esta familia claramente no es vacía, dado que la composición de una traslación con una contracción lineal sirve como un ejemplo,más aún sin perdida de generalidad podemos suponer $W \subset \mathbb{D}$. Como para toda $f \in \mathcal{F}$ se tiene que $| f |< 1$ entonces $\mathcal{F}$ es una familia de funciones holomorfas uniformemente acotada, es decir equicontinua y por lo tanto una familia normal por el teorema de Montel. Note que la función $f \in \mathcal{F}$ tal que $f \longmapsto | f'(0) |$ es acotada, por el lema de Schwarz.
Ahora, para $r > 0$ adecuado tal que $D = D(0, r) \subset W$ tenemos por la desigualdad de Cauchy que:

$$| f'(0) | \leq \frac{1}{r} sup_{\partial D} | f | \leq \frac{1}{r} \text{ para toda } f \in \mathcal{F}.$$

Por lo que $s = sup\{| f'(0) |: f \in \mathcal{F}\}$ existe. Así, por definición de supremo existe una sucesión $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $| f_n'(0) |$ converge a s. Como $\mathcal{F}$ es una familia normal,podemos asumir, pasando por una subsucesión, que f_n converge uniformemente en subconjuntos compactos de W (recordar que esto se puede porque W es un dominio y por lo tanto tiene una extenuación) a una función ϕ la cual es holomorfa por el teorema de Weierstrass de convergencia uniforme (ver [3,p.53-54]), mas aún sabemos que la derivada de f_n también converge uniformemente sobre subconjuntos compactos a la derivada de ϕ por lo que $| \phi'(z_0) |= s$, como $s \neq 0$ se tiene que ϕ no es constante entonces ϕ es univalente por el lema 1, se sigue que también su imagen $U = \phi(W)$ debe ser un subconjunto simplemente conexo de $\mathbb{D}$. Finalmente, si $U \neq \mathbb{D}$ entonces por corolario 1 sabemos que existe una función univalente $F : U \to \mathbb{D}$ tal que $F(0) = 0$ y $| F'(0) |> 1$. Esto no puede ser posible porque $F \circ \phi$ estaría en $\mathcal{F}$ y el valor de absoluto de su derivada en 0 seriá mayor que $sup\{| f'(0) | : f \in \mathcal{F}\}$. Por lo tanto dicha función F debe ser una rotación. □

Nota 1. La inversa del difeomorfismo ϕ construído en el teorema 1 es llamada *la función de Riemann* del conjunto abierto simplemente conexo W. El comportamiento de la función de Riemann en la frontera del disco depende mucho de las propiedades topológicas de la frontera de W. Para la demostración del siguiente teorema ver [5,p.70].

Definición 1. Una curva ó un arco de Jordan es un conjunto homeomorfo a S^1 ó a $[0,1]$ respectivamente.

Definición 2. Un dominio de Jordan G es un conjunto abierto simplemente conexo tal que su frontera ∂G es ó una curva de Jordan ó unión finita de arcos de Jordan.

Teorema 2. *Sea W un dominio simplemente conexo de la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ cuyo complemento contiene al menos dos puntos entonces*

- *La función de Riemann de W se extiende continuamente a la frontera de $\mathbb{D}$ si y sólo si ∂W es localmente conexa.*
- *La función de Riemann se extiende a un homeomorfismo de la clausura de $\mathbb{D}$ sobre la clausura de W si y sólo si ∂W es una curva de Jordan.*

Ejemplo 1. Considere el conjunto A obtenido al suprimir del cuadrado $S = \{z : 0 < Re\, z < 2 \text{ y } 0 < Im\, z < 2\}$ los segmentos verticales $J_n = \{z = \frac{1}{n} + iy : \ 0 \leq y \leq 1\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. El teorema de la función de Riemann garantiza que existe una función conforme de A sobre $\mathbb{D}$, pero el pretender extenderla continuamente a la frontera de A, particularmente a 0, crea problemas.

Nota 2. La función de Riemann también depende continuamente del dominio de Jordan si antes es convenientemente normalizado. El siguiente teorema fue provado por Markushevich [5,teorema 2.26,p.72], y O.J. Farrel [6,teorema III,p.373].

Teorema 3. *Sea $V_1 \supset V_2 \supset \cdots$ una sucesión decreciente de dominios de Jordan uniformemente acotados cuya intersección es un dominio de Jordan V. Sea $z \in V$ y sea $\phi_n : V_n \to \mathbb{D}$ la función de Riemann normalizada de tal forma que $\phi_n(z) = 0$ y la derivada de ϕ_n en z es un número real positivo. Entonces la restricción de ϕ_n a la clausura $\bar{V}$ de V converge uniformemente a la función de Riemann de V.*

Referencias

[1] Edson de Faria and Wellington de Mello, *Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2008.

[2] L. Carlenson and T. W. Gamelin. *Complex Dynamics.* Springer, 1992.

[3] E.M. Stein and R. Shakarchi. *Complex Analysis.* Princeton University Press, 2003.

[4] L.V. Ahlfors. *Complex Analysis.* McGraw-Hill 1979.

[5] A.I. Markushevich. *Theory of Functions of a Complex Variable*, vol. III. Prentice-Hall, 1967.

[6] O.J. Farrel. *On aproximation to a mapping function by polynomials.* Am. J. Math **54** (1932), 571-578.

[7] J. E. Marsden y M. J. Hoffman. *Análisis Básico de Variable Compleja.* Editorial Trillas, 2005.