Cubriente universal holomorfa de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$

Francisco Juárez Lucas

5 Marzo de 2012

1. Cubriente holomorfa de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$

En esta sección vamos a demostrar la existencia de una métrica hiperbólica en el complemento de tres puntos en la esfera de Riemman y estudiaremos la propiedades de dicha métrica.

Teorema 1 *Existe una función cubriente holomorfa* $\pi : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Prueba. Sea $T^+ \subset \mathbb{D}$ el triángulo geodésico ideal con vértices -1,1,i. Por teorema 2 (ver notas de Pablo) existe un homeomorfismo ϕ^+ que manda la cerradura de T^+ sobre la cerradura de $\mathbb{H}$, es decir, un difeomorfismo holomorfo de T^+ sobre $\mathbb{H}$. Tomamos la composición con una transformación de Möbius adecuada, podemos suponer que ϕ^+ manda -1 a 0, 1 a 1 y i a ∞. Por el principio de reflexión de Schwarz, podemos extender ϕ^+ a un difeomorfismo ϕ^- de el triángulo ideal T^- que se obtiene al reflejar T^+ con respecto al lado $(-1, 1)$ sobre el semiplano inferior $\mathbb{H}^-$. Definimos

$$\pi := \begin{cases} \phi^+ & \text{en } T^+ \\ \phi^- & \text{en } T^-, \end{cases}$$

el principio de reflexión de Schwarz, nos dice que ϕ será holomorfa no sólo en la unión de los triángulos, sino también en el lado común. Del mismo modo, podemos extender ϕ^+ a nuevos triángulos mediante reflexiones con respecto a los otros lados. Los dos nuevos triángulos también se proyectan sobre el semiplano inferior. Ahora, utilizando la reflexión con respecto a los lados de los nuevos triángulos, extendemos π a los triángulos adyacentes mediante la asignación de ellos en el semiplano superior.

Continuando con este proceso indefinidamente, obtenemos una triágulación de $\mathbb{D}$ y una función holomorfa π que manda cada triángulo sobre el semiplano superior o bien al semiplano inferior y cada lado de un triángulo sobre un segmento de la recta real: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ o $(1, \infty)$. Esto es, claramente una cubriente holomorfa de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$; ver figura 1. ∎

El teorema anterior prueba la existencia de una métrica hiperbólica en la esfera de Riemann menos tres puntos, es decir, $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$. El siguiente paso es comparar esta métrica conforme con la métrica esférica.

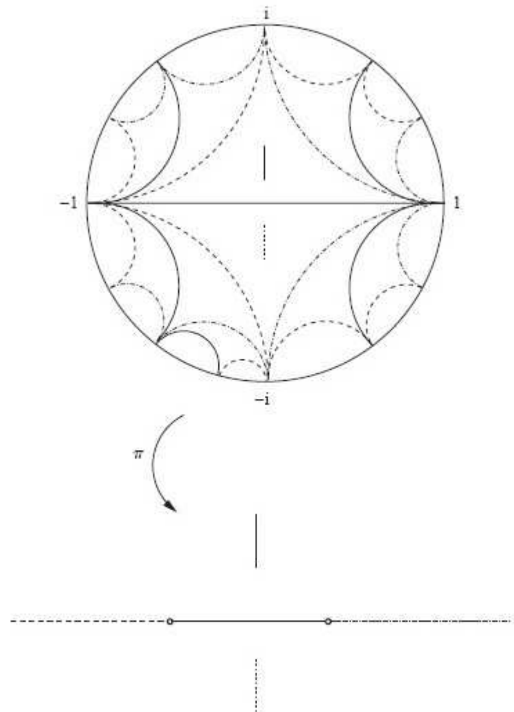

Figura 1: Cubriente holomorfa de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. La figura superior muestra lineas geodésicas de tres tipos (representada por lineas quebradas, sólidas y quebradas y punteadas). Estas se mandan respectivamente sobre lineas quebradas, sólidas y quebradas y punteadas.

Definición 1 *Decimos que dos funciones positivas ρ_1, ρ_2 son comparables si existen constantes positivas C_1 y C_2 tal que $C_1\rho_1 \leq \rho_2 \leq C_2\rho_1$, escribimos $\rho_1 \asymp \rho_2$.*

Teorema 2 *Consideremos la métrica esférica*

$$|ds| = \frac{2|dz|}{1 + |z|^2},$$

y la función distancia $d : \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}^+$. Sea $\rho_0|ds|$ la métrica hiperbólica de $S = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$. Entonces, para todo $w \in S$ existen constantes positivas C_1 y C_2 tal que

$$\frac{C_1}{d(w, \partial S)|\log d(w, \partial S)|} \leq \rho_0(w) \leq \frac{C_2}{d(w, \partial S)|\log d(w, \partial S)|},$$

donde $\partial S = \{0, 1, \infty\}$.

Prueba. Queremos probar que la función ρ_0 es comparable con la función $\rho_1(w) = \frac{1}{d(w,\partial S)|\log d(w,\partial S)|}$. Sea $\pi : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ la función cubriente del teorema 1 y sean B_j, $j = -1, 1, i$, las horobolas disjuntas con vértices en los puntos $-1, 1, i$, es decir, $B_j \subset \mathbb{D}$ es un disco euclideano tangente a $\partial\mathbb{D}$ en el punto j. Notemos que cada horobola B_j es invariante bajo el subgrupo cíclico del grupo de los automorfismos cubrientes que fijan el vértice de la horobola y que la restricción de π a cada horobola es una función cubriente sobre un disco topológico D_j de la esfera de Riemman, donde D_{-1} contiene a 0, D_1 contiene a 1 y D_i contiene a ∞. El complemento de la unión de estos tres discos topológicos es una región compacta de S donde las dos funciones son comparables. Falta demostrar que son comparables en cada D_j. Sea $\phi_j : \mathbb{D} \to D_j$ la función de Riemman tal que $0 \mapsto 0$ si $j = -1$, $0 \mapsto 1$ si $j = 1$ y $0 \mapsto \infty$ si $j = i$. Vamos a demostrar que las dos funciones son comparables en D_{-1}.

Sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{D}$ el cuadrilátero geodésico con vértices -1, $-i$, 1, i, y consideremos la función π de $\mathcal{Q}$ sobre $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Como $\hat{\phi_0}$ es una transformación de Möbius, se sigue que la distancia esférica $d(\hat{z}, \infty)$ es comparable con $d(\hat{w}, -1)$ donde $\hat{w} = \hat{\phi}_{-1}(\hat{z})$. De la misma manera, $d(z,0)$ es comparable con $d(w,0)$ donde $w = \phi_0(z)$. Sin embargo, $d(\hat{z},\infty)$ es comparable con $|\log d(z,0)|^{-1}$ y $\|D\Psi(\hat{z})\|_{sph} \asymp d(z,0)$, donde $\|D\Psi\|_{sph}$ es la norma de la derivada en la métrica esférica. Por lo tanto, las normas de las derivadas de ϕ_0 y $\hat{\phi_0}$ y de sus inversas están acotadas con respecto a la métrica esférica y tenemos que $d(\hat{w}, -1) \asymp |\log d(w,0)|^{-1}$ y $\|D\pi(\hat{w})\|_{sph} \asymp d(w,0)$. Finalmente, $\rho_0(w) = \rho_{\mathbb{D}}(\hat{w})\|D\pi(\hat{w})\|_{sph}$ ya que π es una isometría local con respecto a la métrica hiperbólica. Esto demuestra que las dos funciones son comparables en D_{-1}, pues $\rho_{\mathbb{D}}(\hat{w}) \asymp 1/d(\hat{w}, -1)$. De la misma manera, podemos demostrar que las dos funciones son comparables en D_1 y D_i respectivamente. ∎

Como consecuencia del teorema tenemos el siguiente:

Corolario 1 *Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe una constante positiva $C(\epsilon)$ con la siguiente propiedad. Sea $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ abierto, cuyo complemento contiene al menos tres puntos y es tal que, dado $z_1 \in \partial U$ existen $z_2, z_3 \in \partial U$ con $d(z_i, z_j) \geq \epsilon$. Si $\rho_U|ds|$ es la métrica hiperbólica de U entonces*

$$\frac{C(\epsilon)}{d(w,\partial U)|\log d(w,\partial U)|} \leq \rho_U(w) \leq \frac{1}{d(w,\partial U)},$$

para todo $w \in U$.

Prueba. Sean $w \in U$ y $z_1 \in \partial U$ tal que $d(w,\partial U) = d(w, z_1)$. Sean $z_2, z_3 \in \partial U$ como en el enunciado (para esta elección de z_1) y L una transformación de Möbius tal que $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (0, 1, \infty)$. Si la métrica hiperbólica de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ es $\rho|ds|$, ahora la inclusión $i : U \hookrightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ es una función holomorfa sobre dominios hiperbólicos entonces por el lema de Schwarz (ver notas sección 3.3) por un lado tenemos que i contrae la métrica hiperbólica de U con respecto a la métrica hiperbólica de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ pues $U \subsetneq \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$, es decir, $\rho(w) \leq \rho_U(w)$. Por otro lado, L es una isometría entre la métrica hiperbólica de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ y el de $S = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$. También, con respecto a la métrica esférica, tanto L y su inversa son Lipschitz con constantes acotadas por una función de ϵ. Por último, podemos utilizar la desigualdad de la izquierda del teorema 2 para finalizar la prueba de la desigualdad de la izquierda en el corolario. La desigualdad de la derecha se sigue directamente del lema de Schwarz, ya que el disco en la métrica esférica con centro w y radio $d(w, \partial U)$ está contenida en U, y la densidad de la métrica hiperbólica de este disco en w está dada por el lado derecho de la desigualdad. ∎

En particular, la métrica hiperbólica de cualquier región U de la esfera de Riemann es producto de la métrica esférica y una función positiva que tiende a infinito en ∂U.

Lema 1 *La familia de todas la funciones holomorfas de $\mathbb{D}$ a $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ es una familia normal.*

PRUEBA. Sea $f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ una familia de funciones holomorfas. Tomando una subsucesión si es necesario, supongamos que la sucesión $z_n = f_n(0)$ converge a algún punto z en la esfera de Riemann. Por el lema de Schwarz, la imagen bajo f_n del disco hiperbólico con centro en 0 y radio r esta contenido en el disco hiperbólico con centro z_n y radio r. Si z_n tiende a cero entonces el diametro esférico de este disco debe tender a cero. Por lo tanto, f_n converge uniformemente a cero en subconjuntos compactos. Lo mismo sucede si $z = 1$ o $z = \infty$. Supongamos que $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$. Sea $\hat{z} \in \mathbb{D}$ tal que $\pi(\hat{z}) = z$, donde $\pi : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ es la función cubriente del teorema 1. Tomamos una sucesión $\hat{z}_n$ tal que $\hat{z}_n \to \hat{z}$ con $\pi(\hat{z}_n) = z_n$ y sea $\hat{f}_n$ un levantamiento de f_n con $\hat{f}_n(0) = \hat{z}_n$. Como $\hat{f}_n$ es una sucesión de funciones holomorfas acotadas, se sigue del teorema clásico de Montel que existe una subsucesión $\hat{f}_{n_i}$ que converge uniformemente a una función holomorfa $\hat{f}$ en subconjuntos compactos. Claramente $\hat{f}(0) = \hat{z}$ y, por lo tanto, $\hat{f}$ manda $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$. Luego, la composición $f = \pi \circ \hat{f}$ es el límite de la sucesión f_{n_i}. ∎

Teorema 3 ***(Montel)*** *Sea $\epsilon > 0$ dado y $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas de un dominio U de la esfera de Riemann en $\hat{\mathbb{C}}$. Si para cada $f \in \mathcal{F}$ existen tres puntos $z_1(f)$, $z_2(f)$,$z_3(f)$ en $\hat{\mathbb{C}} \setminus f(U)$ tal que la distancia esférica entre cualesquiera dos de estos puntos es mayor que ϵ entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal.*

PRUEBA. Sin pérdida de generalidad supongamos que $U = \mathbb{D}$. Sea f_n una sucesión de funciones en $\mathcal{F}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea L_n una transformación de Möbius, que manda $z_1(f_n)$ a 0 ,$z_2(f_n)$ a 1 y $z_3(f_n)$ a ∞. Tomamos una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $z_j(f_n)$ converge a z_j. Se sigue que la distancia esférica entre z_j y z_k es al menos ϵ si $j \neq k$. En particular, los tres puntos son distintos y L_n converge uniformemente a la transformación de Möbius L tal que $L(z_1) = 0$, $L(z_2) = 1$, $L(z_3) = \infty$. Por lo tanto, la familia $L_n \circ f_n$ satisface la hipótesis del lema 1. Así, pasando otra vez a una subsucesión, podemos suponer que $L_n \circ f_n$ converge uniformemente a una función g en subconjuntos compactos. Luego, f_n converge uniformemente a $L^{-1} \circ g$ en subconjuntos compactos. ∎

Referencias

[1] Carleson, L. and Gamelin, T., *Complex Dynamics.* Springer-Verlag, USA, 1992.

[2] Edson de Faria and Welington de Melo, *Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics.* Cambridge University Press, USA, 2008.

[3] E.M. Stein and R. Shakarchi, *Complex Analysis.* Princeton University Press, 2003.

[4] Gamelin, T., *Complex Analysis.* Springer-Verlag, USA, 2001.

[5] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis.* McGraw-Hill 1979.