Uniformización de dominios en la esfera de Riemann

María Isabel Castro Martínez

15 de marzo de 2012

Resumen

En esta sección vamos a mostrar una versión del célebre *teorema de uniformización* de Poincaré, Klein y Koebe. Dicha versión trata sólo con dominios en la esfera de Riemann, pero es mas conveniente para aplicaciones dinámicas y también contiene el *teorema del mapeo de Riemann* como un caso especial. Antes de enunciar y probar el teorema, vamos a dar algunos conceptos introductorios a superficies de Riemann.

1. Preliminares

La idea básica de una superficie de Riemann es que localmente se ve como un subconjunto abierto del plano complejo.

Definición 1.1. *Una superficie de Riemann M está formada por una colección (M_{top}, U_i, ϕ_i) tal que:*

I. *M_{top} es un espacio topológico Hausdorff.*

II. *$U_i \subset M_{top}$ son conjuntos abiertos que forman una cubierta numerable.*

III. *$\phi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{C}$ son homeomorfismos (para V_i subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$). Al conjunto de parejas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ se le llama un* ***atlas*** *para M; si $s \in U_i$ decimos que (U_i, ϕ_i) es una* carta *en s.*

IV. *Cada vez que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ las funciones de transición de coordenadas*

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

son holomorfas con inversa holomorfa. Esta propiedad nos dice cuando dos cartas son compatibles.

Se puede tener el caso en que dos atlas diferentes den la misma noción local de un análisis complejo sobre una superficie de Riemann. Diremos que dos atlas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son compatibles si toda carta de uno es compatible con toda carta del otro. La compatibilidad de atlas es una relación de equivalencia. Una **estructura compleja** sobre M es una clase de equivalencia de atlas sobre M. De manera que *cualquier* atlas sobre M determina una única estructura compleja.

Ejemplo 1.2. Dominios. *Todo $U \subset \mathbb{C}$ (subconjunto abierto y conexo) es superficie de Riemann, definida por una única función coordenada $\phi : U \to \mathbb{C}$, enviando $z \mapsto z$.*

Ejemplo 1.3. La esfera de Riemann. *Colocamos en $\widehat{\mathbb{C}}$ dos copias $\mathbb{C}_z, \mathbb{C}_w$ del plano complejo mediante la proyección estereográfica, con z y w sus correspondientes coordenadas. Teniendo entonces dos funciones coordenadas*

$$\phi_1 : U_1 = \mathbb{C}_z \subset (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}) \to \mathbb{C},\ \phi_2 : U_2 = \mathbb{C}_w \subset (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \to \mathbb{C}$$

donde $\phi_1(z) = z$ y $\phi_2(w) = 1/w$. En $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la función de transición de coordenadas $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : z \mapsto 1/z = w$ está bien definida y es holomorfa.

Definición 1.4. *Una función $f : M \to \mathbb{C}$ es holomorfa si y sólo si para cada $U_i \subset M$, la composición*

$$f \circ {\phi_i}^{-1} : \phi_i(U_i) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

es holomorfa en el sentido usual.

Definición 1.5. *Si M_1 y M_2 son dos superficies de Riemann, decimos que $f : M_1 \to M_2$ es holomorfa, si f es continua y si $U_1 \cap f^{-1}(U_2) \neq \emptyset$ entonces $\phi_2 \circ f \circ {\phi_1}^{-1} : \phi_1(U_1 \cap f^{-1}(U_2)) \to \phi_2(U_2)$ es holomorfa para toda carta $(U_1, \phi_1) \in \mathcal{A}_{M_1}$ y $(U_2, \phi_2) \in \mathcal{A}_{M_2}$.*

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_1"'] & M_2 \arrow[d, "\phi_2"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\phi_2 \circ f \circ {\phi_1}^{-1}"] & \mathbb{C} \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Proposición 1.6. *Sea $f : M_1 \to M_2$ una función holomorfa e inyectiva entre superficies de Riemann. Entonces f es un isomorfismo entre M_1 y su imagen $f(M_1)$.*

2. Teorema de Uniformización

Teorema 2.1. *Sea $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ un dominio cuyo complemento contiene al menos tres puntos. Entonces existe una función cubriente holomorfa $\pi : \mathbb{D} \to U$. En particular, si U es simplemente conexo entonces π es un difeomorfismo (de este caso se deduce el teorema de la aplicación de Riemann).*

Demostración. Suponemos que $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, esto es, $0, 1, \infty \notin U$. Sea $\lambda : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ la función cubriente holomorfa dada en la sección 3.5 de [FM].

Podemos asumir $\lambda(0) = z_0 \in U$, si no es así, componemos λ con una transformación de Möbius para que esto suceda. Sea $\phi : \widehat{U} \to U$ el cubriente universal topológico de U y elegimos un punto $\widehat{z_0} \in U$ tal que $\phi(\widehat{z_0}) = z_0$. Vamos a considerar en $\widehat{U}$ la única estructura de superficie de Riemann que hace ϕ holomorfa. Luego, consideramos la familia $\mathcal{F}$ de todos las funciones holomorfas $F : \widehat{U} \to \mathbb{D}$ con las siguientes propiedades:

a. $F(\widehat{z_0}) = 0$.

b. F es una función cubriente holomorfa sobre un dominio $V_F \subset \mathbb{D}$.

c. Existe una función cubriente holomorfa $\Psi_F : V_F \to U$ tal que $\Psi_F \circ F = \phi$.

Por ser $\widehat{U}$ simplemente conexo (dado que $\widehat{U}$ es cubriente universal) existe una función holomorfa $\widehat{\phi} : \widehat{U} \to \mathbb{D}$ tal que $\phi = \lambda \circ \widehat{\phi}$ y se satisface:

I. Por ser ϕ una función cubriente, existe una vecindad U_1 de z_0 tal que $\phi \mid_{U_1}^{-1}$ es un difeomorfismo local y por un argumento similar existe una vecindad U_2 de z_0 tal que $\lambda \mid_{U_2}^{-1}$ es un difeomorfismo local, por lo tanto $U_1 \cap U_2$ es una vecindad de z_0 donde es posible considerar $\widehat{\phi}(\widehat{z_0}) = \lambda^{-1}(\phi(\widehat{z_0})) = \lambda^{-1}(z_0) = 0$.

II. $\widehat{\phi}$ es holomorfa en una vecindad de $\widehat{z_0}$ y por ser $\widehat{U}$ simplemente conexo, para cualquier otro punto $z \in \widehat{U}$ y γ una curva que une $\widehat{z_0}$ con z, podemos extender analíticamente através de γ y por el teorema de Monodromia, sabemos que la extensión no depende de la curva, concluyendo así que $\widehat{\phi}$ es una función cubriente holomorfa sobre un dominio $V_{\widehat{\phi}} = \lambda^{-1}(U) \subset \mathbb{D}$.

III. Satisface (c) dando $\Psi_{\widehat{\phi}} = \lambda$.

Por lo tanto, $\widehat{\phi} \in \mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Ahora, vamos a identificar una vecindad de $\widehat{z_0}$ con una vecindad de z_0 mediante ϕ y usaremos esta identificación para medir el tamaño de las deriavadas. Sea $G_n \in \mathcal{F}$ una sucesión de funciones tales que $|G'_n| \longrightarrow \sup\{|F'(\widehat{z_0})| : F \in \mathcal{F}\}$ cuando $n \to \infty$, por la desigualdad de Cauchy para derivadas y la caracterización del supremo es posible encontrar dicha sucesión $\{G_n\}$, además por ser elementos de $\mathcal{F}$ se sigue que $\{G_n\}$ es una sucesión de funciones holomorfas uniformemente acotada. Entonces por el teorema de Montel se tiene que $\{G_n\}$ converge uniformemente (tomando una subsucesión si es necesario) sobre subconjuntos compactos a una función holomorfa G que envia $\widehat{z_0}$ a 0 y para la cual $|G'(\widehat{z_0})| = \sup\{|F'(\widehat{z_0})| : F \in \mathcal{F}\}$. Ahora bien, si $|G'(\widehat{z_0})| = 0$, entonces $|F'(\widehat{z_0})| = 0$ para toda $F \in \mathcal{F}$ con $\widehat{z_0}$ arbitrario, es decir, F es constante, lo cual contradice el hecho de que F es uno a uno, por ser un homeomorfismo local. Por lo tanto G es un holomorfa y no constante, entonces por el teorema del mapeo abierto, se sigue que la imagen de G es un subconjunto abierto V_G de $\mathbb{D}$. Ahora, cualquier $q \in V_G$ pertenece a V_{G_n} para n suficientemente grande. Por lo que puntualmente $\Psi_{G_n}(q)$ converge a algún $\Psi_G(q)$, ésta función satisface $\Psi_G \circ G = \phi$ y por lo tanto es holomorfa.

Para deducir que G pertenece a la familia $\mathcal{F}$, debemos probar que G y Ψ_G son funciones cubrientes. Primero probaremos que Ψ_G es suprayectiva. Dado $w \in U$ elegimos $\widehat{w} \in \widehat{U}$ tal que $\phi(\widehat{w}) = w$. Puesto que ϕ satisface $\Psi_G \circ G = \phi$, entonces $\Psi_G \circ G(\widehat{w}) = \phi(\widehat{w}) = w$, lo que implica que Ψ_G es suprayectiva.

Luego, sea $B \subset U$ un dominio simplemente conexo cuya cerradura es compacta y simplemente conexa. Entonces por ser ϕ una función cubriente $\phi^{-1}(B) = \cup B_i$, donde los B_i son dominios disjuntos dos a dos, simplemente conexos y satisfacen que la restricción de ϕ a cada B_i es un difeomorfismo sobre B. Como la cerradura de B_i es compacta, entonces la restricción de G_n a $\overline{B}_i$ converge uniformemente, en particular la restricción de G_n a B_i converge uniformemente a la restricción de G a B_i, el cual es un difeomorfismo sobre un dominio simplemente conexo ${B_i}^G := G(B_i) \subset V_G$. Luego, por la propiedad $\Psi_G \circ G = \phi$, se tiene que la restricción de Ψ_G a cada ${B_i}^G$ es un difeomorfismo sobre B. Además como G_n y Ψ_{G_n} son funciones cubrientes y satisfacen $\Psi_{G_n} \circ G_n = \phi$, por la elección de los B_i, es decir, dominios disjuntos dos a dos y simplemente conexos, se tiene por la inyectividad de G_n (por ser difeomorfismo local) que ${B_i}^{G_n} \cap {B_j}^{G_n} = \emptyset$ o bien ${B_i}^{G_n} = {B_j}^{G_n}$. Nuevamente usando el hecho de que $\Psi_G \circ G = \phi$, se tiene que ${\Psi_G}^{-1}(B)$ es la unión de ${B_i}^G$, donde la restricción de Ψ_G a cada ${B_i}^G$ es un difeomorfismo sobre B. Teniendo así que Ψ_G es una función cubriente. Sin embargo $G^{-1}({B_i}^G) = G^{-1}(G(B_i))$ es la unión de todos los B_k tales que ${B_k}^G = {B_i}^G$ y la restricción de G a cada B_i es un difeomorfismo sobre ${B_i}^G$. De manera que el conjunto de todos los ${B_i}^G$ para toda i y todo $B \subset U$ es un cubriente de V_G y por lo tanto G es una función cubriente. Así hemos probado que $G \in \mathcal{F}$.

Por último vamos a mostrar que $V_G = \mathbb{D}$. Supongamos que $V_G \neq \mathbb{D}$, es decir, existe $v \in \mathbb{D} \setminus V_G$, claramente $v \neq 0$. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ la función holomorfa construida en la sección 3.4 de [FM], que es una función cubriente de grado 2, $\mathbb{D} \setminus \{c\} \to \mathbb{D} \setminus \{v\}$ y envia el 0 en el 0. Sea W la componente conexa de $f^{-1}(V_G)$ que contiene al 0. Entonces $f : W \to V_G$ es una función cubriente, y podemos levantar G a una función holomorfa $\widehat{G} : \widehat{U} \to W$. Donde $\widehat{G}$ pertenece a la familia $\mathcal{F}$, ya que:

I. $\widehat{G}(\widehat{z_0}) = f^{-1}(G(\widehat{z_0})) = f^{-1}(0) = 0$.

II. $\widehat{G}$ es una función cubriente holomorfa sobre $W \subset \mathbb{D}$.

III. se satisface (c), dando $\Psi_{\widehat{G}} = \Psi_G \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
W \subset \mathbb{D} \arrow[dr, "f"] & \\
\widehat{U} \arrow[u, "\widehat{G}"] \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\phi"'] & V_G \subset \mathbb{D} \arrow[dl, "\Psi_G"] \\
U &
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

por lo tanto $f \circ \widehat{G} = G$ y $|f'(0)| < 1$ (por el lema de Schwarz), se tiene que

$$\begin{aligned}
|G'(\widehat{z_0})| &= |(f \circ \widehat{G})'(\widehat{z_0})| \\
&= |f'(0)||\widehat{G}'(\widehat{z_0})| \\
&< |\widehat{G}'(\widehat{z_0})|
\end{aligned}$$

lo cual contradice el hecho de que $|G'(\widehat{z_0})| = \sup\{|F'(\widehat{z_0})| : F \in \mathcal{F}\}$. Por lo que $V_G = \mathbb{D}$ y así G es un difeomorfismo holomorfo de $\widehat{U}$ sobre $\mathbb{D}$, teniando entonces el resultado deseado, esto es, existe Ψ_G una función cubriente holomorfa de $\mathbb{D}$ a U y si U es simplemente conexo Ψ_G es un difeomorfismo. $\square$

Todas aquellas superficies M que tienen como cubriente universal al disco $\mathbb{D}$ se llaman *superficies hiperbólicas*. En la sección 3.5 de [FM] se probó que $\mathbb{D}$ induce una métrica (la métrica hiperbólica) en la superficie M.

Por lo tanto, se ha mostrado que cualquier dominio U de la esfera de Riemann cuyo complemento tiene al menos tres puntos tiene una métrica hiperbólica (puesto que en el teorema anterior se probó que $\mathbb{D}$ era el cubriente universal de U). La esfera de Riemann en si misma tiene una métrica completa de curvatura constante 1, que es la métrica esferica. El plano complejo tiene una métrica de curvatura constante 0, que es la métrica Euclideana. El complemento de dos puntos en la esfera (es decir, el plano complejo agujerado) es cubierto por el plano $\mathbb{C}$ (como se vio en un ejemplo de la sección 3.2 de [FM]) y por lo tanto también tiene una métrica completa de curvatura 0.

2.1. Dominios anulares

Un ejemplo importante de uniformización se da en los dominios anulares.

Definición 2.2. *Un subdominio A de la esfera de Riemann es llamado un* dominio anular *si su complemento tiene exactamente dos componentes conexas.*

Si cada componente conexa es homotópica a un punto, entonces como se ha visto, A tiene una métrica completa de curvatura 0. Si una componente no es homotópica a un punto, entonces existe un mapeo cubriente holomorfo $\pi : \mathbb{D} \to A$ (por el teorema de uniformización). El grupo de automorfismos de $\mathbb{D}$ es generado por una única transformación de Möbius ϕ que actúa sin puntos fijos en $\mathbb{D}$ (si un automorfismo del disco fija un punto, se tendría una rotación o una contracción y no podría ser función cubriente; por otro lado, si fija dos puntos entonces es la identidad, como se probó en el ejercicio 4 tarea 10 del curso de variable compleja 1), además este grupo es isomorfo al grupo fundamental de A. Por lo tanto, si ϕ tiene puntos fijos, deben estar en la frontera de $\mathbb{D}$.

Si ϕ tiene un único punto fijo p, podemos conjugar ϕ con una transformación de Möbius, que mande $\mathbb{D}$ en $\mathbb{H}$ y $p \mapsto \infty$, de manera que tengamos la isometría hiperbólica de $\mathbb{H}$, $z \mapsto z+1$. Por lo tanto, existe una función cubriente de $\mathbb{H}$ en A cuyo grupo de automorfismo es $\{z \mapsto z + n : n \in \mathbb{Z}\}$, que es justo el grupo de automorfismos de la función cubriente de $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, como se vió en la sección 3.2 [FM].

Supongamos ahora que el generador ϕ del grupo de automorfismos del cubriente $\pi : \mathbb{D} \to A$ tiene dos puntos fijos en la frontera de $\mathbb{D}$, entonces mediante una transformación de Möbius podemos enviar $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{H}$ y mandar los puntos fijos de ϕ a 0 y a ∞. Esta transformación de Möbius conjuga ϕ obteniendo una homotecia $z \mapsto \lambda z$, donde λ es un número real mayor que 1. Entonces al componer π con la inversa de esta transformación, se tiene una función cubriente $\pi : \mathbb{H} \to A$ cuyo grupo de automorfismos es $\{z \mapsto \lambda^n z\}$, el cual es el grupo de automorfismos de un anillo A_R con $\log R = 2\pi / \log \lambda$. De manera que A es conformemente equivalente al anillo $A_R = \{z \in \mathbb{C} : 1 <\mid z \mid< R\}$.

La imagen de la geodésica vertical que conecta los puntos fijos de los automorfismos es una geodésica cerrada en A cuya longitud es $\log \lambda$, puesto que minimiza la longitud de las curvas cerradas en su clase de homotópia. Por lo que la longitud de estas geodésicas es un invariante conforme del anillo. Es usual considerar un invariante relativo, llamado el *módulo* del anillo, denotado como $\mathrm{mod}(A)$, el cual es el cociente de 2π entre la longitud de la geodésica cerrada. Obteniendo que mod $(A_R) = \frac{2\pi}{\log \lambda} = \log R$.

Proposición 2.3. *Sea $f : A_1 \to A_2$ una función cubriente holomorfa de grado d entre dos anillos. Entonces*

$$\mathrm{mod}\ (A_1) = \frac{1}{d}\ \mathrm{mod}\ (A_2).$$

Demostración. El mapeo cubriente f, por el Lema de Schwarz versión dominios hiperbólicos es una contracción o una isometría, pero no puede ser una contracción, entonces f es una isometría local entre las métricas hiperbólicas. Por lo tanto la restricción a la geodésica cerrada de A_1 es una cubriente de grado d de la geodésica cerrada de A_2. Entonces la longitud de la geodésica cerrada de A_1 es d veces la longitud de la geodésica cerrada de A_2, es decir, $\log(\lambda_1) = d \log(\lambda_2)$, lo que implica $\frac{2\pi}{\log(R_1)} = d\frac{2\pi}{\log(R_2)}$ y despejando tiene que $\mathrm{mod}(A_1) = \mathrm{mod}(A_2)$. □

Referencias

[FM] Edson de Faria and Welington de Melo. *Mathematical tools for one-dimensional dinamics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics.

[JS] Jones, G. A and Singerman, D. *Complex Functions. An algebraic and geometric viewpoint*, Cambridge University Press 1987.

[BM] L. Brambila-Paz y Jesús Muciño-Raymundo. *Geometría de superficies de Riemann y haces lineales holomorfos*, Aportaciones matemáticas, Serie comunicaciones 22 (1998).

[M] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, Graduate studies in mathematics, Volume 5, American Mathematical Society.