Distorsión Conforme

Marcos Alan González Schtulmann
Centro de Investigación en Matemáticas

Marzo, 2012

Resumen

El comportamiento geométrico de una aplicación conforme cerca de la frontera de su dominio puede ser algo agresivo; en contraste, como el teorema de la función de Riemann nos muestra, el comportamiento dentro del dominio es relativamente sencillo. Este es el significado geométrico del teorema de distorsión de Koebe. Controlar la distorsión conforme es en muchas ocasiones crucial para las aplicaciones en dinámica.

Definición 1. Sean $V \subset \mathbb{C}$ un dominio y $\phi : V \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y univalente. Sea $D \subset V$ un conjunto cerrado. Definimos la **no-linealidad** de ϕ en D como

$$N_\phi(D) = |D| \sup_{z\in D} \left| \frac{\phi''(z)}{\phi'(z)} \right| \tag{1}$$

donde $|D|$ denota el diámetro de D. Hagamos dos observaciones:

1) $N_\phi(D)$ es no-decreciente como función de D. En efecto, si $D_1 \subset D_2 \subset V$, entonces $|D_1| \leq |D_2|$ y

$$\sup_{z\in D_1} \left| \frac{\phi''(z)}{\phi'(z)} \right| \leq \sup_{z\in D_2} \left| \frac{\phi''(z)}{\phi'(z)} \right|. \tag{2}$$

De aquí que $N_\phi(D_1) \leq N_\phi(D_2)$.

2) Si $\phi(z) = az + b$, entonces $N_\phi(D) \equiv 0$ pues $\phi''(z) = 0$.

Lema 1. Sean $\phi : V \to \mathbb{C}$ holomorfa y univalente, $D \subset V$ cerrado y convexo. Entonces, para todo $z_1, z_2 \in D$ tenemos

$$exp(-N_\phi(D)) \leq \left|\frac{\phi'(z_1)}{\phi'(z_2)}\right| \leq exp(N_\phi(D)) \tag{3}$$

Demostración. Sea $[z_1, z_2]$ el segmento de recta que une z_1 con z_2. Como D es convexo, dicho segmento está contenido en D.

Ahora, tenemos que D es un conjunto simplemente conexo pues es convexo [6, p.334]; además, ϕ es una función holomorfa y univalente, de modo que $\phi'(z) \neq 0$ para toda $z \in V$ y por tanto existe una rama del logaritmo [7, p.100] tal que

$$\begin{aligned} \int_{[z_1,z_2]} \frac{\phi''(z)}{\phi'(z)} dz &= log(\phi'(z_1)) - log(\phi'(z_2)) \\ &= log\left(\frac{\phi'(z_1)}{\phi'(z_2)}\right) + 2k\pi i \end{aligned} \tag{4}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left|log\left(\frac{\phi'(z_1)}{\phi'(z_2)}\right) + 2k\pi i\right| &= \left|\int_{[z_1,z_2]} \frac{\phi''(z)}{\phi'(z)} dz\right| \\ &\leq \int_{[z_1,z_2]} \left|\frac{\phi''(z)}{\phi'(z)}\right| |dz| \\ &\leq |z_1 - z_2| \sup_{z\in[z_1,z_2]} \left|\frac{\phi''(z)}{\phi'(z)}\right| \\ &\leq N_\phi(D). \end{aligned} \tag{5}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \left|log\left(\frac{\phi'(z_1)}{\phi'(z_2)}\right) + 2k\pi i\right| &= \left|log\left|\frac{\phi'(z_1)}{\phi'(z_2)}\right| + i\left(arg\frac{\phi'(z_1)}{\phi'(z_2)} + 2k\pi\right)\right| \\ &\geq log\left|\frac{\phi'(z_1)}{\phi'(z_2)}\right| \end{aligned} \tag{6}$$

Por tanto, $log\left|\frac{\phi'(z_1)}{\phi'(z_2)}\right| \leq N_\phi(D)$ y en consecuencia, $\left|\frac{\phi'(z_1)}{\phi'(z_2)}\right| \leq exp(N_\phi(D))$. Ahora, como z_1 y z_2 fueron arbitrarios, tenemos también que $\left|\frac{\phi'(z_2)}{\phi'(z_1)}\right| \leq exp(N_\phi(D))$, de donde se deduce la cota inferior.

$\square$

Teorema 1 (Koebe)**.** Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y univalente, entonces

$$D(f(0); \frac{1}{4}|f'(0)|) \subset f(\mathbb{D}) \tag{7}$$

Demostración. Sea $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) \neq c$ para todo $z \in \mathbb{D}$, es decir, c es un elemento fuera de la imagen de f. Definamos las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ como

$$f_1(z) := \frac{f(z) - f(0)}{f'(0)}, \qquad f_2(z) := \frac{f(0) - c}{f'(0)} \frac{f(z) - f(0)}{f(z) - c}. \tag{8}$$

Ambas funciones son holomorfas y univalentes. Además, tenemos que $f_1(0) = 0$, $f_1'(z) = f'(z)/f'(0)$, de modo que $f_1'(0) = 1$ y por tanto $f_1 \in S$. Así, podemos expresar a f_1 como $f_1(z) = z + a_2 z^2 + ...$, donde $a_2 = f''(0)/2!f'(0)$.

Análogamente, mostremos que $f_2 \in S$. En efecto, $f_2(0) = 0$ y

$$\begin{aligned} f_2'(z) &= \frac{f(0) - c}{f'(0)} \left[\frac{(f(z) - c)f'(z) - (f(z) - f(0)f'(z))}{(f(z) - c)^2} \right] \\ &= \frac{f(0) - c}{f'(0)} \left[\frac{f(0)f'(z) - cf'(z)}{(f(z) - c)^2} \right] \\ &= \frac{(f(0) - c)^2}{f'(0)} \left[\frac{f'(z)}{(f(z) - c)^2} \right], \end{aligned} \tag{9}$$

entonces $f_2'(0) = 1$. Por tanto podemos expresar a f_2 como $f_2(z) = z + \tilde{a_2} z^2 + ...$. Obtengamos explícitamente el término $\tilde{a_2}$.

$$f_2''(z) = \frac{(f(0) - c)^2}{f'(0)} \left[\frac{(f(z) - c)^2 f''(z) - 2(f'(0))^2 (f(z) - c)}{(f(z) - c)^4} \right], \tag{10}$$

en consecuencia,

$$f_2''(0) = \frac{f''(0)}{f'(0)} - \frac{2f'(0)}{f(0) - c}. \tag{11}$$

Entonces $\tilde{a_2} = a_2 - f'(0)/(f(0) - c)$, pues habíamos obtenido $a_2 = f''(0)/2!f'(0)$. Finalmente, debido al teorema de Bieberbach, tenemos que $|a_2| \leq 2$ y $|\tilde{a_2}| \leq 2$, es decir,

$$|a_2| \leq 2, \qquad |a_2 - \frac{f'(0)}{f(0) - c}| \leq 2, \tag{12}$$

de tal manera que

$$\left|\frac{f'(0)}{f(0) - c}\right| \leq \left|\frac{f'(0)}{f(0) - c} - a_2\right| + |a_2| \leq 4. \tag{13}$$

Por tanto, $|f(0)-c| \geq |f'(0)|/4$. Si $c \in \partial f(\mathbb{D})$, esto nos dice que $D(f(0); \frac{1}{4}|f'(0)|) \subset f(\mathbb{D})$.

□

Teorema 2 (Koebe generalizado)**.** Sea $f : D \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y univalente, donde $D = D(z_0; r)$. Entonces,

$$D(f(z_0); \frac{1}{4}r|f'(z_0)|) \subset f(D) \tag{14}$$

Demostración. Sean $g : D \to \mathbb{D}$, $h : \mathbb{D} \to f(D)$ definidas por $g(z) = (z - z_0)/r$ y $h = f \circ g^{-1}$. La aplicación h es holomorfa y univalente con $h(\mathbb{D}) = f(D)$. Luego, por el teorema 1 se tiene que

$$D(h(0); \frac{1}{4}|h'(0)|) \subset h(\mathbb{D}) = f(D). \tag{15}$$

Pero $f = h \circ g$, de donde obtenemos que $f(z_0) = h(g(z_0)) = h(0)$ y $f'(z_0) = h'(g(z_0))g'(z_0) = h'(0)/r$; entonces $|h'(0)| = r|f'(z_0)|$. Sustituyendo en (15), obtenemos que la contención deseada.

□

Observemos que la no-linealidad $N_\phi(D)$ puede acotarse con ayuda de la estimación puntual de Koebe

$$\left|\frac{\phi''(z)}{\phi'(z)}\right| \leq \frac{4}{dist(z, \partial V)} \tag{16}$$

Multiplicando dicha desigualdad por $|D|$ y aplicando supremo sobre D del lado izquierdo obtenemos que

$$N_\phi(D) \leq \frac{4|D|}{dist(z, \partial V)} \tag{17}$$

Utilizaremos este resultado en conjunto con el lema anterior para obtener lo siguiente.

Lema 2. Sean $\phi : V \to \mathbb{C}$ holomorfa y univalente, $D \subset V$ cerrado y convexo. Entonces, para todo $z_1, z_2 \in D$ tenemos

$$\frac{1}{K} \leq \left| \frac{\phi'(z_1)}{\phi'(z_2)} \right| \leq K \tag{18}$$

donde $K = exp(4|D|/dist(D, \partial V))$.

Demostración. Se obtiene directamente de (3) y de (17) que

$$K^{-1} \leq exp(-N_\phi(D)) \leq \left| \frac{\phi'(z_1)}{\phi'(z_2)} \right| \leq exp(N_\phi(D)) \leq K \tag{19}$$

□

A continuación veremos que podemos acotar no sólo el cociente de las derivadas, sino también los cocientes de diferencias.

Lema 3. Sean $\phi : V \to \mathbb{C}$ holomorfa y univalente, $D \subset V$ cerrado y convexo. Entonces existe $C \in \mathbb{R}^+$ (que depende de D) tal que para todo $x, y, z \in D$ tenemos

$$C^{-1}|\phi'(z)| \leq \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|} \leq C|\phi'(z)| \tag{20}$$

Demostración. Obtengamos primero la cota superior.
Para ello, vemos que

$$\int_{[x,y]} \phi'(w)dw = \phi(x) - \phi(y). \tag{21}$$

Luego,

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(y)| &\leq \int_{[x,y]} |\phi'(w)||dw| \\ &\leq |x - y| \sup_{w \in [x,y]} |\phi'(w)| \\ &\leq |x - y| K |\phi'(z)|, \end{aligned} \tag{22}$$

esto debido a la cota superior de la desigualdad obtenida en el lema precedente. Ahora obtengamos la estimación inferior. Sea

$$r := min\{\frac{1}{2}|x-y|, dist(D, \partial V)\}, \tag{23}$$

entonces $D(x; r) \subset V$, de aquí que ϕ es univalente y holomorfa en $D(x; r)$. Luego, por el teorema de $\frac{1}{4}$ de Koebe tenemos que

$$\phi(D(x; r)) \supset D(\phi(x), \frac{1}{4}r|\phi'(x)|). \tag{24}$$

Ahora, por como definimos r tenemos que $y \notin D(x; r)$, y además ϕ es inyectiva, de modo que $\phi(y) \notin \phi(D(x; r))$, pues de lo contrario existiría $p \in D(x; r)$ tal que $\phi(p) = \phi(y)$ contradiciendo la inyectividad de la función. En consecuencia,

$$|\phi(x) - \phi(y)| \geq \frac{1}{4}r|\phi'(x)| \tag{25}$$

Por otra parte,

$$\frac{r}{|x-y|} = min\{1/2, \frac{dist(D, \partial V)}{|x-y|}\}, \tag{26}$$

pero $|x-y| \leq |D|$, de modo que

$$\frac{dist(D, \partial V)}{|x-y|} \geq \frac{dist(D, \partial V)}{|D|}. \tag{27}$$

Entonces, de (26) y (27),

$$\frac{r}{|x-y|} \geq min\{1/2, \frac{dist(D, \partial V)}{|D|}\} =: C_1. \tag{28}$$

Finalmente, de (25) y (28) tenemos que,

$$\frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x-y|} \geq \frac{C_1}{4}|\phi'(x)| \geq \frac{C_1}{4K}|\phi'(z)| \tag{29}$$

donde la última desigualdad se debe a la cota inferior obtenida en el lema 2. Así pues, si definimos $C := max\{K, 4K/C_1\}$, obtenemos la desigualdad requerida. $\square$

Bibliografía

[1] E. de Faria, *On Conformal Distorsion and Sullivan's Sector Theorem*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volumen 126, No.1, Enero 1998, pags. 67-74.

[2] E. de Faria W. de Melo, *Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics*, Cambridge, 2008.

[3] T. W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer, 1993.

[4] Y. Jiang, *Renormalization and Geometry in One-Dimensional and Complex Dynamics*, World Scientific, 1996.

[5] C. McMullen, *Area and Hausdorff Dimension of Julia Sets of Entire Functions*, Transactions of the American Mathematical Society, Volumen 300, No. 1, Marzo 1987.

[6] J. R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[7] E. M. Stein, *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.