Difeomorfismos Cuasiconformes

Malors Emilio Espinosa Lara

1 Preliminares

Sean $f : U \to V, g : V \to W$ difeomorfismos C^1 entre abiertos U, V, W de $\mathbb{C}$. Se cumplen las siguientes igualdades:

C1: $\partial(g \circ f)(z) = \partial g(f(z))\partial f(z) + \overline{\partial} g(f(z))\overline{\overline{\partial} f(z)}$.

C2: $\overline{\partial}(g \circ f)(z) = \partial g(f(z))\overline{\partial} f(z) + \overline{\partial} g(f(z))\overline{\partial f(z)}$.

Sea $f : U \to V$ un difeomorfismo C^1 que preserva orientación entre abiertos U, V del plano. Denotemos por $J(z)$ al Jacobiano de f en $z \in U$ y como f preserva orientación entonces $J(z) > 0$ para todo $z \in U$. Sabemos que se cumple:

$$J(z) = |\partial f(z)|^2 - |\overline{\partial} f(z)|^2.$$

De aquí obtenemos lo siguiente:

$$|\partial f(z)|^2 \geq |\partial f(z)|^2 - |\overline{\partial} f(z)|^2 > 0.$$

y por lo tanto, $\partial f(z) \neq 0$.

Basados en esta observación podemos dar las siguientes definiciones:

Definición(Dilatación compleja, Coeficiente de Beltrami):

Sea $f : U \to V$ un difeomorfismo C^1 que preserva orientación entre abiertos U, V del plano. Definimos la *dilatación compleja* de f en z como:

$$\mu(z) = \frac{\overline{\partial} f(z)}{\partial f(z)}.$$

A la función μ obtenida al variar z se le llama *coeficiente de Beltrami*.

Definición(Difeomorfismo K-cuasiconforme):

Sea $f : U \to V$ un difeomorfismo C^1 que preserva orientación entre abiertos U, V del plano. Sea $K \geq 1$, decimos que f es un *difeomorfismo K-cuasiconforme* si su dilatación compleja cumple:

$$|\mu(z)| \leq \frac{K-1}{K+1}.$$

Estas defnciones tienen una interpretación geométrica. Primeramente, notemos que al despejar K de la desigualdad anterior se obtiene:

$$\frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|} \leq K.$$

Sea $z \in U$ un elemento arbitrario y consideremos $Df(z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal derivada. Consideremos una elipse centrada en el origen, cuya excentricidad sea $\epsilon = \dfrac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$ y tal que el ángulo entre el eje mayor y el eje real positivo sea $\theta = \dfrac{\arg \mu(z)}{2}$. Se tiene que esta transformación lineal envía esta elipse en un círculo.

Definición(Distorsión Conforme):

Sea $f : U \to V$ un difeomorfismo C^1 que preserva orientación entre abiertos U, V del plano. El número positivo

$$K(z) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|},$$

se llama *distorsión conforme* de f en z.

2 Proposiciones

Antes de poder probar el teorema de Grötzsch necesitamos demostrar algunas proposiciones.

Proposición 1:

Son verdaderos los siguientes enunciados:

1. Un difeomorfismo de clase C^1 que es 1-cuasiconforme es, de hecho, un difeomorfismo holomorfo.
2. Si f es una composición de un difeomorfismo conforme con un difeomorfismo $K-$cuasiconforme es $K-$cuasiconforme.
3. El inverso de un difeomorfismo $K-$cuasiconforme es $K-$cuasiconforme.
4. La composición de un un difeomorfismo $K-$cuasiconforme con un difeomorfismo $K'-$cuasiconforme es $KK'-$cuasiconforme.

Demostración:

1. Como $K = 1$ entonces $|\mu(z)| \leq \dfrac{K-1}{K+1} = 0$. De aquí obtenemos que $\overline{\partial} f(z) = 0$ para todo $z \in U$. Esto es, se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y son continuas por ser f una función C^1. Esto nos asegura que f es holomorfa como queríamos demostrar.

2. Un difeomorfismo conforme es $1-$cuasiconforme. Por lo tanto, esto es una consecuencia del inciso 4.

3. Aplicando **C1** y **C2** con $g = f^{-1}$ obtenemos las siguientes dos igualdades:

   E1: $1 = \partial f^{-1}(w) \partial f(f^{-1}(w)) + \overline{\partial} f^{-1}(w) \overline{\overline{\partial} f(f^{-1}(w))}$,
   E2: $0 = \partial f^{-1}(w) \overline{\partial} f(f^{-1}(w)) + \overline{\partial} f^{-1}(w) \overline{\partial f(f^{-1}(w))}$.

   Las dos ecuaciones anteriores forman un sistema en $\partial f^{-1}(w)$ y $\overline{\partial} f^{-1}(w)$ cuyo determinante es $J(z) > 0$. Por lo tanto, tiene una solución única que es la siguiente:

   $$\begin{aligned} \partial f^{-1}(w) &= \frac{\overline{\partial f(f^{-1}(w))}}{J(z)}, \\ \overline{\partial} f^{-1}(w) &= -\frac{\overline{\partial} f(f^{-1}(w))}{J(z)}. \end{aligned}$$

   Por lo que: $|\mu_{f^{-1}}(w)| = |\mu_f(f^{-1}(w))| \leq \dfrac{K-1}{K+1}$. Esto implica que f^{-1} es un difeomorfismo $K-$cuasiconforme.

4. Obtenemos este resultado como consecuencia de la desigualdad del triángulo. Se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{1+|\mu_{g\circ f}|}{1-|\mu_{g\circ f}|} &= \frac{|\partial(g\circ f)| + |\overline{\partial}(g\circ f)|}{|\partial(g\circ f)| - |\overline{\partial}(g\circ f)|} \\ &= \frac{|\partial g(f(z))\partial f(z) + \overline{\partial} g(f(z))\overline{\overline{\partial} f(z)}| + |\partial g(f(z))\overline{\partial} f(z) + \overline{\partial} g(f(z))\overline{\partial f(z)}|}{|\partial g(f(z))\partial f(z) + \overline{\partial} g(f(z))\overline{\overline{\partial} f(z)}| - |\partial g(f(z))\overline{\partial} f(z) + \overline{\partial} g(f(z))\partial f(z)|} \\ &= \frac{|\partial g(f(z))\partial f(z)| + |\overline{\partial} g(f(z))\overline{\overline{\partial} f(z)}| + |\partial g(f(z))\overline{\partial} f(z)| + |\overline{\partial} g(f(z))\overline{\partial f(z)}|}{|\partial g(f(z))\partial f(z)| + |\overline{\partial} g(f(z))\overline{\overline{\partial} f(z)}| - |\partial g(f(z))\overline{\partial} f(z)| - |\overline{\partial} g(f(z))\partial f(z)|} \\ &\leq \frac{|\partial g(f(z))\partial f(z)| + |\overline{\partial} g(f(z))\overline{\partial} f(z)| + |\partial g(f(z))\overline{\partial} f(z)| + |\overline{\partial} g(f(z))\partial f(z)|}{|\partial g(f(z))\partial f(z)| + |\overline{\partial} g(f(z))\ \overline{\partial} f(z)| - |\partial g(f(z))\overline{\partial} f(z)| - |\overline{\partial} g(f(z))\partial f(z)|} \\ &= \frac{1+|\mu_f|}{1-|\mu_f|}\frac{1+|\mu_g|}{1-|\mu_g|} \\ &\leq KK' \end{aligned}$$

De esta desigualdad se sigue el resultado.

■

Proposición 2:

Sea f un difeomorfismo cuasiconforme. Entonces

$$|\partial f(z)| \leq \sqrt{K(z)J(z)}.$$

Demostración:

Recordemos que $J(z) = |\partial f(z)|^2 - |\overline{\partial} f(z)|^2$. Entonces tenemos la siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
J(z)K(z) &= \left(|\partial f(z)|^2 - |\overline{\partial} f(z)|^2\right) K(z) \\
&= \left(|\partial f(z)| + |\overline{\partial} f(z)|\right)\left(|\partial f(z)| - |\overline{\partial} f(z)\right) K(z) \\
&= \left(|\partial f(z)| + |\mu_f(z)||\partial f(z)|\right)\left(|\partial f(z)| - |\mu_f(z)||\partial f(z)|\right) K(z) \\
&= |\partial f(z)|^2 \left(1 + |\mu_f(z)|\right)\left(1 - |\mu_f(z)|\right) K(z) \\
&= |\partial f(z)|^2 \left(1 + |\mu_f(z)|\right)^2 \\
&\geq |\partial f(z)|^2
\end{aligned}$$

Sacando raíz de ambos lados obtenemos lo que queríamos demostrar.

■

3 Teorema de Grötzsch

Ahora procedemos a demostrar el teorema principal de este escrito. La prueba es conocida como *el argumento de Grötzsch*.

Teorema de Grötzsch:

Sea $\phi : R_1 \to R_2$ un difeomorfismo $K-$cuasiconforme entre dos dominios anulares de módulo finito. Entonces:

$$\frac{1}{K} \ \operatorname{mod} R_1 \leq \ \operatorname{mod} R_2 \leq K \ \operatorname{mod} R_1.$$

Demostración:

Dividiremos la prueba en distintos pasos para que su lectura sea más sencilla.

Paso 1: Suficiencia para ánulos:

Como R_1 es un dominio anular entonces es conformemente equivalente a un anillo del mismo módulo. Digamos que R_1 y R_2 son conformemente equivalentes a A_r y A_R, respectivamente. Además, como la composición de una aplicación $K-$cuasiconforme con un mapeo conforme da un mapeo $K-$cuasiconforme podemos utilizar el difeomorfismo inducido por ϕ entre A_r y A_R. Si demostramos el teorema para este caso habremos concluido por la invarianza del módulo y de K. A partir de ahora supondremos $\phi : A_r \to A_R$.

Paso 2: Mapa conforme entre cilindros:

Sea $C_r = \mathbb{S}^1 \times (0, \log r)$ y $\phi_r : C_r \to A_r$ definido por $\phi_r(x, y, z) = (e^z x, e^z y)$. Es una función diferenciable y por tanto restringida al cilindro también lo es, más aún una vez restringido es un difeomorfismo. Deseamos ver que es conforme. Consideremos un punto fijo $p = (x, y, z)$ en el cilindro, el diferencial de la función está dado por: $D\phi_r(p)(a, b, c) = (e^z a + xe^z c, e^z b + ye^z c)$. Al calcular el producto punto entre dos vectores $A_1 = (a_1, b_1, c_1), A_2 = (a_2, b_2, c_2)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
< D\phi_r(p)(A_1), D\phi_r(p)(A_2) > =& < (e^z a_1 + xe^z c_1, e^z b_1 + ye^z c_1),\\
&(e^z a_2 + xe^z c_2, e^z b_2 + ye^z c_2) >\\
&= e^{2z}(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2(x^2 + y^2)\\
&+ c_2(a_1 x + b_1 y) + c_1(a_2 x + b_2 y))\\
&= e^{2z}(a_1 a_2 + b_2 b_2 + c_1 c_2)\\
&= e^{2z} < A_1, A_2 >
\end{aligned}$$

donde hemos usado que los vectores tangentes en el punto (x, y, z) del cilindrdo son tales que son ortogonales al vector $(x, y, 0)$ y que $x^2+y^2 = 1$. De los cálculos mostrados vemos que ϕ_r es conforme con densidad $\rho(z) = e^z$. Consideremos la curva $\Gamma_\theta(t) = \phi(\cos\theta, \sin\theta, t)$. Dado que ϕ es un difeomorfismo debe unir puntos de las distintas componentes de la frontera. Por lo tanto, su longitud es al menos $\log R$. Por otra parte, como podemos parametrizar el cilindro C_R con A_r via el difeomorfismo entre A_r y A_R obtenemos que su longitud es

$$\int_0^{\log r} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| dt \geq \log R.$$

Paso 3: Desigualdades

Integrando la última desigualdad con respecto a θ obtenemos:

$$\begin{aligned}
2\pi \log R &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{\log r} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| dt d\theta\\
&\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{\log r} \sqrt{K_\phi J_\phi} dt d\theta\\
&\leq \sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^{\log r} K_\phi dt d\theta \int_0^{2\pi} \int_0^{\log r} J_\phi dt d\theta}\\
&\leq \sqrt{K(2\pi \log r)(2\pi \log R)}
\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la fórmula de cambio de variable.

Paso 4: Primera parte de la desigualdad

Comparando los extremos de la desigualdad anterior obtenemos:

$$(2\pi \log R)^2 \leq K(2\pi \log r)(2\pi \log R),$$

o lo que es lo mismo,

$$\text{mod } A_R \leq K \ \text{ mod } A_r,$$

pues tenemos que

$$\text{mod } A_r = \frac{\log r}{2\pi}.$$

Paso 5: Conclusión

Aplicando un argumento análogo con el difemorfismo $K-$cuasiconforme ϕ^{-1} obtenemos que:

$$\text{mod } A_r \leq K \ \text{ mod } A_R,$$

y al unir las dos desigualdades obtenidas tendremos:

$$\frac{1}{K} \ \text{ mod } A_r \leq \ \text{ mod } A_R \leq K \ \text{ mod } A_r,$$

como deseábamos demostrar.

■

Haciendo cálculos análogos tenemos un resultado parecido para rectángulos.

Teorema

Sea $f : R(0, a, a+bi, bi) \to R(0, a', a'+b'i, b'i)$ un homemorfismo que manda vértices a vértices en el orden dado y si f es un difeomorfismo $K-$cuasiconforme en el interior del rectángulo entonces:

$$\frac{1}{K}\left(\frac{a}{b}\right) \leq \frac{a'}{b'} \leq K\left(\frac{a'}{b'}\right).$$

Demostración

No dividiremos en pasos esta vez, pues la prueba de este teorema no agrega nada nuevo a la del teorema anterior. Sea $y \in [a, b]$ un elemento fijo y consideremos la curva $\Gamma_y(t) = f(t, y)$. Como f es un homemorfismo entre los rectángulos, en particular, debe enviar la frontera en la frontera y además como preserva el orden de los vértices debe unir dos puntos de los lados verticales de

$R(0, a', a' + b'i, b'i)$. Por lo tanto, la longitud de dicha curva es al menos a'. Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} a' &\leq \int_0^a |\Gamma_y'(t)|dt \\ &= \int_0^a |f'(t,y)|dt \end{aligned}$$

Y entonces al integrar con respecto a y obtenemos:

$$\begin{aligned} ba' &\leq \int_0^b \int_0^a |f'(t,y)|dtdy \\ &\leq \int_0^b \int_0^a \sqrt{K_f(t,y)J_f(t,y)}dtdy \\ &\leq \left(\int_0^b \int_0^a K_f(t,y)dtdy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^b \int_0^a J_f(t,y)dtdy\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{K} \left(\int_0^b \int_0^a dtdy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^b \int_0^a J_f(t,y)dtdy\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{K(ab)(a'b')}. \end{aligned}$$

Comparando ambos lados de la desigualdad obtenemos:

$$\frac{a'}{b'} \leq K\left(\frac{a}{b}\right).$$

Utilizando el mismo argumento con la inversa de f obtenemos:

$$\frac{a}{b} \leq K\left(\frac{a'}{b'}\right).$$

De aquí que:

$$\frac{1}{K}\left(\frac{a}{b}\right) \leq \frac{a'}{b'} \leq K\left(\frac{a}{b}\right),$$

como queríamos demostrar.

■

4 Bibliografía

1. Lectures on Quasiconformal Mappings, lars V. Alfhors.

2. Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics, Edson de Faria, Welington de Melo