Longitud extrema y módulo de cuadriláteros

María Isabel Castro Martínez

25 de abril de 2012

Sea Γ una familia de curvas de clase C^1 a trozos en el plano. Vamos a asignar una cantidad geométrica $\lambda(\Gamma)$, llamada *longitud extrema* de Γ que es una especie de longitud mínima promedio. Es importante su estudio por el hecho de ser invariante bajo funciones conformes, en el sentido de que si f es una función conforme cuyo dominio contiene todas las curvas de la familia entonces $\lambda(f(\Gamma)) = \lambda(\Gamma)$, o bien, es un cuasi-invariante bajo funciones cuasiconformes.

Sea ρ es una función medible no negativa, definimos la $\rho-$longitud de una curva γ de clase C^1 mediante

$$l_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho|dz| = \int \rho(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$$

si la función $t \mapsto \rho(\gamma(t))$ es medible y $l_\rho(\gamma) = \infty$ en otro caso.

Ahora, definimos la $\rho-$longitud de la familia Γ como

$$L_\rho(\Gamma) = \inf_{\gamma\in\Gamma} l_\rho(\gamma).$$

Podemos ahora definir la **longitud extrema** de la familia mediante

$$\lambda(\Gamma) = \sup_\rho \frac{(L_\rho(\Gamma))^2}{A_\rho}$$

donde el supremo se toma sobre el conjunto de todas las funciones ρ medibles no negativas y con área finita, es decir,

$$A_\rho = \iint_{\mathbb{C}} \rho^2 dxdy < \infty.$$

Recordemos que una métrica Riemanniana es *conforme* si, para cada z, $< v, w >_z = (\rho(z))^2 < v, w >$ donde $<\cdot\,,\cdot>$ es el producto interno Euclideano de $\mathbb{C}$ y ρ es una función positiva de clase C^∞.

Si existe una métrica conforme $\rho|dz|$ que realiza la longitud extrema, ésta es llamada una *métrica extrema* de la familia.

Teorema 0.1. *Si $f : U \to V$ es un difeomorfismo $K-$cuasiconforme y Γ es una familia de curvas de clase C^1 a trozos en U, entonces*

$$\frac{1}{K}\lambda(\Gamma) \leq \lambda(f(\Gamma)) \leq K\lambda(\Gamma).$$

Demostración. Para estimar la longitud extrema de Γ, podemos restringirnos a métricas conformes que se anulen fuera de U, pues sabemos que al menos la métrica Euclideana es conforme y dado que A_ρ es finita, ρ se anula fuera de un conjunto, de lo contrario el área seguiría creciendo.

Para cada una de éstas métricas $\rho|dz|$, sea $w = f(z)$ y $\hat{\rho}|dw|$ la métrica conforme definida como

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(w) &= \frac{\rho(z)}{|\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)|} \\ &= \frac{\rho(f^{-1}(w))}{|\partial f(f^{-1}(w))| - |\bar{\partial} f(f^{-1}(w))|} \end{aligned} \tag{0.1}$$

además por ser f un difeomorfismo, establecemos $\hat{\rho}(w) = 0$ para toda $w \notin V$. Observese que $\hat{\rho}(w) \geq 0$, puesto que $\rho \geq 0$ y $|\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)| > 0$ por considerar que f es un difeomorfismo que preserva orientación. Ahora, si $\gamma \in \Gamma$ y $\hat{\gamma} = f \circ \gamma \in f(\Gamma)$, entonces

$$\hat{\gamma}'(t) = \partial f(z)\gamma'(t) + \bar{\partial} f(z)\overline{\gamma'(t)},$$

de manera que por la desigualdad del triángulo alrevés

$$\begin{aligned} |\partial f(\gamma(t))\gamma'(t) + \bar{\partial} f(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)}| &\geq |\partial f(\gamma(t))\gamma'(t)| - |\bar{\partial} f(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)}| \\ &= |\partial f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)| - |\bar{\partial} f(\gamma(t))|\,|\overline{\gamma'(t)}| \\ &= (|\partial f(\gamma(t))| - |\bar{\partial} f(\gamma(t))|)\,|\gamma'(t)|. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Calculamos

$$\int_{\hat{\gamma}} \hat{\rho}(w)|dw| = \int \hat{\rho}(f \circ \gamma)\, |\partial f(\gamma(t))\gamma'(t) + \bar{\partial} f(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)}|dt,$$

donde, al sustituir $\hat{\rho}$ en (0.1) y por la desigualdad (0.2) se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\gamma}} \hat{\rho}(w)|dw| &\geq \int \frac{\rho(f^{-1}(f \circ \gamma(t)))}{|\partial f(f^{-1}(f \circ \gamma(t)))| - |\bar{\partial} f(f^{-1}(f \circ \gamma(t)))|}(|\partial f(\gamma(t))| - |\bar{\partial} f(\gamma(t))|)|\gamma'(t)|dt \\ &= \int \frac{\rho(\gamma(t))}{|\partial f(\gamma(t))| - |\bar{\partial} f(\gamma(t))|}(|\partial f(\gamma(t))| - |\bar{\partial} f(\gamma(t))|)|\gamma'(t)|dt \\ &= \int \rho(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt \\ &= \int_\gamma \rho(z)|dz| \end{aligned}$$

esto es,

$$l_{\hat{\rho}}(\hat{\gamma}) \geq l_\rho(\gamma),$$

y por lo tanto

$$L_{\hat{\rho}}(f(\Gamma)) \geq L_\rho(\Gamma). \tag{0.3}$$

Por otro lado, al integrar mediante el cambio de variable propuesto $w = f(z)$, donde $J_f(z) = |\partial f(z)|^2 - |\bar{\partial} f(z)|^2$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\iint_V \hat{\rho}^2(w)\, dudv &= \iint_{f^{-1}(V)} \hat{\rho}^2(f(z))\; J_f(z)\; dxdy \\
&= \iint_U \frac{\rho^2(z)}{(|\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)|)^2}\; (|\partial f(z)|^2 - |\bar{\partial} f(z)|^2)\; dxdy \\
&= \iint_U \frac{\rho^2(z)}{(|\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)|)^2}(|\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)|)(|\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|)dxdy \\
&= \iint_U \rho^2(z)\frac{|\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|}{|\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)|}dxdy \\
&\leq \iint_U K\; \rho^2(z)dxdy \qquad (0.4) \\
&= K \iint_U \rho^2(z)dxdy
\end{aligned}
$$

donde la desigualdad (0.4) se tiene por ser f un difeomorfismo K-cuasiconforme, observemos

$$
\begin{aligned}
\frac{|\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|}{|\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)|} &= \frac{1 + \frac{|\bar{\partial} f(z)|}{|\partial f(z)|}}{1 - \frac{|\bar{\partial} f(z)|}{|\partial f(z)|}} \\
&= \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \\
&\leq K.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se sigue que $A_{\hat{\rho}} \leq K\; A_\rho$, es decir,

$$
\frac{1}{K\; A_\rho} \leq \frac{1}{A_{\hat{\rho}}}. \qquad (0.5)
$$

De esta manera, por (0.3) y (0.5) obtenemos que

$$
\frac{L_\rho(\Gamma)}{K\; A_\rho} \leq \frac{L_{\hat{\rho}}(f(\Gamma))}{A_{\hat{\rho}}}
$$

lo que implica

$$
\frac{1}{K}\lambda(\Gamma) \leq \lambda(f(\Gamma)). \qquad (0.6)
$$

Para la otra desigualdad, usamos el hecho de que si f es un difeomorfismo $K-$cuasiconforme, entonces f^{-1} es también $K-$cuasiconforme. Asi al aplicar la desigualdad (0.6) a $\hat{\Gamma} = f(\Gamma)$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{K}\lambda(\hat{\Gamma}) \leq \lambda(f^{-1}(\hat{\Gamma})) &\iff \frac{1}{K}\lambda(f(\Gamma)) \leq \lambda(f^{-1}(f(\Gamma))) \\
&\iff \frac{1}{K}\lambda(f(\Gamma)) \leq \lambda(\Gamma) \\
&\iff \lambda(f(\Gamma)) \leq K\lambda(\Gamma).
\end{aligned}
$$

$\square$

Corolario 0.2. *La longitud extrema es un invariante conforme.*

Demostración. Si f es un difeomorfismo conforme, entonces $K = 1$ y por lo tanto $\lambda(f(\Gamma)) = \lambda(\Gamma)$. $\square$

Ejemplo 0.3. *El módulo de un rectángulo como una longitud extrema.*

Sea $R = R(0, a, a+ib, bi)$ el rectángulo con vértices $0, a, a+ib, ib$, y sea Γ la familia de curvas de clase C^1 por tramos en R, las cuales conectan los dos lados verticales de R.

Consideremos $\rho_e = 1$ en R y $\rho_e = 0$ en el complemento de R, entonces

$$L_{\rho_e}(\Gamma) = \inf_{\gamma \in \Gamma} l_{\rho_e}(\gamma) = a,$$

y

$$A_{\rho_e} = \iint_R {\rho_e}^2 dxdy = \int_0^b \int_0^a dxdy = ab.$$

Por lo tanto,

$$\lambda(\Gamma) = \sup_{\rho} \frac{(L_\rho(\Gamma))^2}{A_\rho} \geq \frac{(L_{\rho_e})^2}{A_{\rho_e}} = \frac{a^2}{ab} = \frac{a}{b}. \tag{0.7}$$

Por otra parte, para cualquier $\rho \geq 0$ y la curva $x \mapsto x + iy$, $y \in (0, b)$ se tiene que

$$\int_0^a \rho(x+iy)dx \geq L_\rho(\Gamma) = \inf_{\gamma \in \Gamma} l_\rho(\gamma),$$

lo que implica que

$$\iint_R \rho \; dxdy \geq L_\rho(\Gamma) \int_0^b dy = b \; L_\rho(\Gamma),$$

así

$$\left(\iint_R \rho \; dxdy \right)^2 \geq b^2 \; (L_\rho(\Gamma))^2. \tag{0.8}$$

Observese que al definir el producto interno entre dos funciones medibles no negativas como

$$< \rho, \sigma >= \iint_R \rho\sigma dxdxy$$

induce una norma

$$||\rho|| = (< \rho, \rho >)^{1/2} = \left(\iint_R \rho^2 dxdy \right)^{1/2},$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$< \rho, 1 >\leq ||\rho|| \; ||1||,$$

esto es,

$$\iint_R \rho\, dxdy \leq \left(\iint_R \rho^2 dxdy\right)^{1/2} \left(\iint_R dxdy\right)^{1/2},$$

lo que implica

$$\left(\iint_R \rho\, dxdy\right)^2 \leq \iint_R \rho^2 dxdy \iint_R dxdy = ab \iint_R \rho^2 dxdy.$$

De esta última desigualdad y de la ecuación (0.8) se tiene que

$$b^2\, (L_\rho(\Gamma))^2 \leq ab \iint_R \rho^2 dxdy \leq ab\, A_\rho$$

Entonces

$$\frac{(L_\rho(\Gamma))^2}{A_\rho} \leq \frac{ab}{b^2} = \frac{a}{b},$$

y por lo tanto

$$\lambda(\Gamma) \leq \frac{a}{b}. \tag{0.9}$$

De manera que (0.7) y (0.9) implican que la longitud extrema de la familia Γ es igual a $\frac{a}{b}$ y $|dz|$ es la métrica extrema. Si consideramos Γ^* como el conjunto de curvas en R que conectan los dos lados horizontales, entonces aplicando un argumento similar se sigue que $\lambda(\Gamma^*) = \frac{b}{a}$. Por lo tanto el producto de las longitudes extremas de ambas familias es igual a 1.

Ejemplo 0.4. *Módulo de un anillo como longitud extrema.*

Sea Γ el conjunto de curvas de clase C^1 a trozos en el anillo $A_R = \{z \in \mathbb{C} :\ 1 < |z| < R\}$, las cuales conectan las componentes fronteras.

Consideremos $\rho_\alpha(z) = \frac{1}{|z|}$ con $z = re^{i\theta}$, $r > 0$. Calculamos

$$l_{\rho_\alpha}(\gamma) = \int_\gamma \rho_\alpha\, |dz| = \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|} = \int_1^R \frac{1}{r} dr = \log R,$$

es decir,

$$L_{\rho_\alpha}(\Gamma) = \log R.$$

Teniendo además que

$$A_{\rho_\alpha} = \iint_{A_R} {\rho_\alpha}^2 |dz| = \int_0^{2\pi} \int_1^R \frac{1}{r^2} r\, drd\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^R \frac{1}{r} drd\theta = \int_0^{2\pi} \log R = 2\pi \log R.$$

De esta manera,

$$\lambda(\Gamma) = \sup_\rho \frac{(L_\rho(\Gamma))^2}{A_\rho} \geq \frac{(L_{\rho_\alpha}(\Gamma))^2}{A_{\rho_\alpha}} = \frac{(\log R)^2}{2\pi \log R} = \frac{\log R}{2\pi}. \tag{0.10}$$

Por otro lado, para cualquier $\rho \geq 0$ y la curva $r \mapsto re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ se tiene que

$$\int_1^R \rho dr \geq L_\rho(\Gamma),$$

luego al integrar respecto de θ

$$\int_0^{2\pi}\int_1^R \rho\, drd\theta = \iint_{A_R} \rho\, drd\theta \geq L_\rho(\Gamma)\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi L_\rho(\Gamma),$$

elevando al cuadrado y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se sigue que

$$\begin{aligned}
4\pi^2(L_\rho(\Gamma))^2 &\leq \left(\iint_{A_R} \rho\, drd\theta\right)^2 \\
&= \left(\iint_{A_R} \frac{\rho}{r}\, rdrd\theta\right)^2 \\
&\leq \iint_{A_R} \rho^2\, r\, drd\theta \iint_{A_R} \frac{1}{r^2}\, rdrd\theta \\
&= \iint_{A_R} \rho^2\, rdrd\theta \iint_{A_R} \frac{1}{r} drd\theta \\
&= 2\pi \log R\; A_\rho,
\end{aligned}$$

esto es,

$$\frac{(L_\rho(\Gamma))^2}{A_\rho} \leq \frac{2\pi \log R}{4\pi^2},$$

y por lo tanto

$$\lambda(\Gamma) = \sup_\rho \frac{(L_\rho(\Gamma))^2}{A_\rho} \leq \frac{\log R}{2\pi}, \tag{0.11}$$

concluyendo asi por (0.10) y (0.11) que

$$\lambda(\Gamma) = \frac{\log R}{2\pi},$$

y $\rho(z)|dz|$ con $\rho(z) = \frac{1}{|z|}$ es la métrica extrema. Para cualquier anillo topológico A, la longitud extrema de la familia de curvas de clase C^1 a trozos, las cuales conectan las componentes fronteras de A es igual al módulo de A, salvo multiplicación por una constante, es decir, $\lambda(\Gamma) = \frac{1}{2\pi}\text{mod } A$, por lo que hay una única métrica extrema.

Sean C_1 y C_2 las componentes fronteras del anillo A_R (respectivamente la componente acotada y la no acotada), decimos que una curva cerrada γ en A_R separa a C_1 y C_2 si γ tiene índice distinto de cero en los puntos de C_1. Si denotamos a Γ^* como el conjunto de curvas cerradas que separan las dos componentes de $\mathbb{C} \setminus A_R$, entonces la longitud extrema de Γ^* es $\frac{1}{\lambda(\Gamma)}$.

En efecto, para cualquier $\rho \geq 0$ y la curva $r \mapsto re^{i\theta}$, $r \in (1, R)$ se tiene lo siguiente

$$L_\rho(\Gamma^*) \leq \int_0^{2\pi} \rho(re^{i\theta})\, rd\theta,$$

lo que implica

$$\frac{L_\rho(\Gamma^*)}{r} \leq \int_0^{2\pi} \rho\, d\theta,$$

luego al integrar respecto de r

$$L_\rho(\Gamma^*)\ \log R = L_\rho(\Gamma^*) \int_1^R \frac{1}{r}\, dr \leq \iint_{A_R} \rho\, drd\theta,$$

entonces al elevar al cuadrado y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\begin{aligned} (L_\rho(\Gamma^*))^2 \log^2 R &\leq \left(\iint_{A_R} \rho\, drd\theta \right)^2 \\ &\leq 2\pi \log R \iint_{A_R} \rho^2\, rdrd\theta, \end{aligned}$$

de manera que

$$\frac{(L_\rho(\Gamma^*))^2}{A_\rho} \leq \frac{2\pi}{\log R},$$

es decir,

$$\lambda(\Gamma^*) \leq \frac{2\pi}{\log R}. \tag{0.12}$$

Por otro lado, al considerar $\rho_\alpha = \frac{1}{2\pi|z|} = \frac{1}{2\pi r}$, se tiene que para toda $\gamma \in \Gamma^*$

$$1 \leq |I(\gamma, 0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{1}{|z|} = l_{\rho_\alpha}(\gamma),$$

donde $I(\gamma, 0)$ denota el índice del origen (para facilitar cálculos) respecto a la curva γ, entonces al tomar el ínfimo sobre γ en la desigualdad, implica que

$$L_{\rho_\alpha}(\Gamma^*) \geq 1.$$

Calculamos

$$A_{\rho_\alpha} = \iint_{A_R} \frac{1}{(2\pi r)^2} rdrd\theta = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_1^R \frac{1}{r} drd\theta = \frac{1}{4\pi^2} 2\pi \log R = \frac{\log R}{2\pi},$$

por lo tanto,

$$\lambda(\Gamma^*) = \sup_\rho \frac{(L_\rho(\Gamma^*))^2}{A_\rho} \geq \frac{(L_{\rho_\alpha}(\Gamma^*))^2}{A_{\rho_\alpha}} \geq \frac{2\pi}{\log R}, \tag{0.13}$$

concluyendo de esta forma por (0.12) y (0.13) que

$$\lambda(\Gamma^*) = \frac{2\pi}{\log R} = \frac{1}{\lambda(\Gamma)}.$$

Como una aplicación geométrica, podemos deducir una prueba fácil del siguiente resultado ya conocido:

Teorema 0.5. *Sea* $A(r,R)=\{z\in\mathbb{C}:\ r<|z|<R\}$, *(*$0<r<R<\infty$*). Si* $A_1(r_1,R_1)$ *y* $A_2(r_2,R_2)$ *son conformemente equivalentes, entonces* $\operatorname{mod} A_1=\operatorname{mod} A_2$.

Demostración. Sea Γ_A la familia de todas las curvas en A, las cuales unen los dos contornos, entonces como se demostró en el ejemplo 0.4, $\lambda(\Gamma_A)=\frac{\log(R/r)}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\operatorname{mod} A$. Sea f una función conforme de A_1 sobre A_2; entonces por la invarianza de la longitud extrema

$$\frac{1}{2\pi}\operatorname{mod} A_1=\lambda(\Gamma_{A_1})=\lambda(f(\Gamma_{A_1}))=\lambda(\Gamma_{A_2})=\frac{1}{2\pi}\operatorname{mod} A_2.$$

□

Referencias

[deFdeM] Edson de Faria and Welington de Melo. *Mathematical tools for one-dimensional dinamics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics (2008), págs. 81-83.

[Ah] Lars V. Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings*, Harvard University (1966), págs 10-14.

[Ch] Bo-Hyun Chung. *Some geometric applications of extremal length*, Journal of the Chungcheong Mathematical Society, vol 12, Agosto 1999, págs 193-196.