Módulo de cuadriláteros

Marcos Alan González Schtulmann
Centro de Investigación en Matemáticas

Abril, 2012

Resumen

Obtendremos un homeomorfismo entre la cerradura de un cuadrilátero y la cerradura de un rectángulo, tal que preserva vértices y es un biholomorfismo del interior del cuadrilátero en el interior del rectángulo. A partir de aquí, obtendremos el módulo de un cuadrilátero y algunas de sus propiedades.

Definición 1 (Cuadrilátero)**.** Un *cuadrilátero* $Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ es un dominio de Jordan con 4 puntos distintos z_1, z_2, z_3, z_4 marcados en la frontera de Q con orientación positiva.

A los arcos orientados positivamente de la frontera de Q que conectan z_1 con z_2 y z_3 con z_4 se les llama *lados horizontales*, mientras que a los arcos que conectan z_2 con z_3 y z_4 con z_1, *lados verticales*.

Definición 2 (Módulo de Q)**.** Definimos el *módulo* del cuadrilátero Q, denotado por mod Q, como la longitud extrema de la familia de curvas suaves a trozos que conectan los lados verticales (z_1, z_4) y (z_2, z_3).

Proposición 1 (Aplicación canónica de cuadriláteros)**.** Sea $Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ un cuadrilátero. Entonces, existe un homeomorfismo de la cerradura de Q en la cerradura de un rectángulo $R = R(0, a, a+i, i)$, con $a > 0$, que preserva los vértices y es conforme en el interior del cuadrilátero.

Demostración. Por el teorema de la aplicación de Riemann, tenemos que existe una función conforme $F : Q \to \mathbb{D}$. Luego, como la frontera de Q es una curva de Jordan, tenemos por el teorema 3.4.4 [1, pág. 36] que dicha aplicación se extiende a un homeomorfismo $\tilde{F} : \bar{Q} \to \bar{\mathbb{D}}$.

Esta aplicación puede ser normalizada [2, pág 125] de tal manera que

$$\begin{aligned} z_1 &\mapsto 1 \\ z_2 &\mapsto i \\ z_3 &\mapsto -1 \end{aligned} \tag{1}$$

Como $\tilde{F}$ aplica ∂Q en $\partial\mathbb{D}$, el punto z_4 también lo aplica a un punto del círculo unitario, pero como la funcion preserva orientación, $\tilde{F}(z_4)$ debe pertenecer al semicírculo inferior (sin los extremos), esto es, $\tilde{F}(z_4) = c$ con $c \in \partial\mathbb{D}$, $\mathrm{Im}(c) < 0$.

Ahora, sea $R := R_a = R(0, a, a+i, i)$ y sea $\tilde{f}_a : \bar{R} \to \bar{\mathbb{D}}$ la aplicación de Riemann extendida con la misma normalización dada anteriormente, donde $\tilde{f}_a(i) = \tilde{c} \in \partial\mathbb{D}$ con $\mathrm{Im}(\tilde{c}) < 0$.

Sea $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función definida como $\theta(a) = \mathrm{Re}\tilde{f}_a(i)$. Tenemos que $\theta(\mathbb{R}^+) \subset (-1, 1)$; si mostramos que $\theta(\mathbb{R}^+) = (-1, 1)$, entonces la proposición queda demostrada pues existiría un $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $c = \tilde{c}$ y la aplicación $\tilde{f}_a^{-1} \circ \tilde{F} : \bar{Q} \to \bar{R}$ sería el homeomorfismo que estamos buscando.

Probemos que θ es una función continua; sean $a \in \mathbb{R}^+$ y el rectángulo $R = R_a$, tomemos una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$ que converge al punto a. Cada a_n nos define un rectángulo $R_n := R_{a_n}$. Elijamos un punto $z_0 \in R$ tal que $z_0 \in R_n$ para toda n; esto es posible pues de ser necesario podemos tomar al punto suficientemente cercano al lado vertical $(0, i)$. Para cada n, escojamos una transformación afín $T_n : R_n \to \hat{R}_n := T_n(R_n)$ con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} & T_n(z_0) = z_0 \\ & T_n'(z_0) > 0 \\ & R \subset \hat{R}_n \\ & \hat{R}_n \supset \hat{R}_{n+1} \\ & T_n \to I \quad \text{(uniformemente)} \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora definamos la sucesión de aplicaciones de Riemann $\phi_n : R_n \to \mathbb{D}$, con $\phi(z_0) = 0$ y $\phi'(z_0) > 0$. De aquí, construyamos las funciones $\hat{\phi}_n : \hat{R}_n \to \mathbb{D}$ como $\hat{\phi}_n := \phi_n \circ {T_n}^{-1}$; éstas son las aplicaciones de Riemann de $\hat{R}_n$ debido a lo siguiente:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_n(z_0) &= \phi_n({T_n}^{-1}(z_0)) = \phi(z_0) = 0 \\ \hat{\phi}'_n(z_0) &= \phi'_n({T_n}^{-1}(z_0)){T_n}^{-1\prime}(z_0) = \phi'_n(z_0)s > 0\end{aligned} \tag{3}$$

donde s es una constante positiva pues las transformaciones afines son escalamientos de los rectángulos. Como la aplicación de Riemann en $\hat{R}_n$ es el único biholomorfismo de $\hat{R}_n$ en $\mathbb{D}$ con dicha normalización, obtenemos que para cada n, $\hat{\phi}_n$ es la aplicación de Riemann en dichos rectángulos.

Luego, como $\hat{R}_1 \supset \hat{R}_2 \supset ...$ es una sucesión decreciente de dominios de Jordan uniformemente acotados cuya intersección $\bigcap \hat{R}_n = R$ es un dominio de Jordan (esto pues $T_n \to I$ uniformemente), entonces por el teorema 3.4.5 [1, pág 36] tenemos que las extensiones homeomorfas $(\hat{\phi}_n)^\sim : \bar{R}_n \to \bar{\mathbb{D}}$ convergen uniformemente a la extensión homeomorfa de la aplicación de Riemann de R, es decir, $(\hat{\phi}_n)^\sim \to \tilde{f}_a$ uniformemente. Ahora, como $\hat{\phi}_n = \phi_n \circ {T_n}^{-1}$, tenemos que $\phi_n = \hat{\phi}_n \circ T_n$. Como T_n converge uniformemente a la identidad, se sigue que $(\phi_n)^\sim \to \tilde{f}_a$.

En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\tilde{\phi}_n(i) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\tilde{f}_{a_n}(i) = \lim_{n\to\infty} \theta(a_n) = \mathrm{Re}\tilde{f}_a(i) = \theta(a). \tag{4}$$

Esto prueba la continuidad de θ. Finalmente probemos que si $b_n \to \infty$, entonces $\theta(b_n) \to 1$ y si $b_n \to 0$, entonces $\theta(b_n) \to -1$; esto muestra la sobreyectividad deseada pues θ es continua (teorema del valor intermedio).
En efecto, $b_n \to \infty$ implica que $\theta(b_n) \to 1$, pues de lo contrario, existiría $M > 0$ tal que para una subsucesión b_{n_k}

$$|1 - \theta(b_{n_k})| \geq M$$

de modo que la longitud euclídea (cuando $\rho \equiv 1$) de cualquier curva que conecte los lados horizontales de $\mathbb{D}$ sería diferente de 0. De aquí que para cada k (la cual nos define discos marcados y familias $\Gamma^H_{n_k}(\mathbb{D})$ de curvas que unen sus lados horizontales), $L_1(\Gamma^H_{n_k}(\mathbb{D}))$ está acotada inferiormente por la longitud euclídea de la recta que une a los puntos $(1, 0)$ con $(1 - M, (1 - (1 - M)^2)^{1/2})$ (ecuación del círculo). Denotemos dicha longitud por P. Por tanto tenemos que $(L_1(\Gamma^H_n(\mathbb{D})))^2 \geq P^2$, entonces

$$0 < \frac{P^2}{A_1(\mathbb{D})} \leq \frac{(L_1(\Gamma^H_{n_k}(\mathbb{D}))^2}{A_1(\mathbb{D})} \leq \sup_\rho \frac{(L_\rho(\Gamma^H_{n_k}(\mathbb{D}))^2}{A_\rho(\mathbb{D})} = \lambda(\Gamma^H_n(\mathbb{D})). \tag{5}$$

De aquí que $\lambda(\Gamma^H_{n_k}(\mathbb{D}))$ no converge a 0. Pero como λ es un invariante conforme esto es lo mismo que la longitud extrema de la familia de curvas que conectan los lados horizontales de R_{n_k}, luego, la longitud extrema se realiza en $\rho \equiv 1$ y entonces $\lambda(\Gamma^H(R_{n_k})) = 1/b_{n_k} \to 0$, lo cual es una contradicción. Similarmente se prueba que $\theta(b_n) \to 1$ si $b_n \to 0$.

□

En consecuencia, si Q es un cuadrilátero y f el homeomorfismo entre la cerradura de Q y la cerradura de $R = R(0, M, M+i, i)$ que preserva vértices y es biholomorfismo entre entre Q y R, entonces $M = \text{mod}R = \lambda(\Gamma(R)) = \lambda(f(\Gamma(R))) = \text{mod}Q$. Esta función es llamada *aplicación canónica* del cuadrilátero Q.
Vimos con anterioridad que el módulo de un rectángulo (su longitud extrema) se alcanza en $\rho \equiv 1$, es decir, su métrica extrema resultó ser $|dz|$. Ahora, por el teorema de cambio de variable tenemos que

$$A_1(R) = \int_R dw = \int_Q |detDf(z)|dz = \int_Q |f'(z)|^2 dz = A_{|f'|^2}(Q) \tag{6}$$

y similarmente para el numerador de $\lambda(\Gamma Q)$, de modo que también se alcanza la longitud extrema sobre la familia de curvas que conectan los lados verticales del cuadrilátero, y se alcanza en $\rho(z) = |f'(z)|$, de modo que la métrica extrema es $\rho|dz|$.

Corolario 1. El módulo de un cuadrilátero $Q(z1, z2, z3, z4)$ es el inverso del módulo de $Q(z2, z3, z4, z1)$.

Prueba. Se probó anteriormente que el módulo de un rectángulo tomando la familia de curvas que unen lados verticales es el inverso del módulo del rectángulo tomando la familia de curvas que unen sus lados horizontales; tenemos también que los lados verticales de $Q(z2, z3, z4, z1)$ son precisamente los lados horizontales de $Q(z1, z2, z3, z4)$, de donde obtenemos directamente la conclusión del corolario considerando la aplicación canónica de cuadriláteros y usando el hecho de que la longitud extrema es un invariante conforme. □

Proposición 2. Sea Q un cuadrilátero. Considere una curva que conecte los lados horizontales de Q y descomponga a Q en la unión disjunta de dos cuadriláteros Q_1 y Q_2. Entonces,

$$modQ \geq modQ_1 + modQ_2 \tag{7}$$

y la igualdad ocurre si y sólo si Q_1 y Q_2 son rectángulos.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que Q es un rectángulo $Q = R(0, M, M+i, i)$. Sean $f_j : \bar{Q}_j \to \bar{R}_j = \bar{R}(0, M_j, M_j + i, i)$ las aplicaciones canónicas, con $j = 1, 2$.

Consideremos la métrica conforme $\rho|dz|$ en Q dada por $\rho(z) = \rho_j(z) = |f_j'(z)|$ si $z \in Q_j$ (recordemos que $\rho_j|dz|$ es métrica extrema de la familia $\Gamma(Q_j)$).

Utilizando el teorema de cambio de variable tenemos que:

$$\lambda(\Gamma(Q_j)) = M_j = A_1(R_j) = A_{\rho_j}(Q_j), \tag{8}$$

y además, como Q es la unión disjunta de Q_1 y Q_2

$$A_\rho(Q) = A_{\rho_1}(Q_1) + A_{\rho_2}(Q_2). \tag{9}$$

Pero como ρ_j es métrica extrema para $\Gamma(Q_j)$, tenemos que

$$\lambda(\Gamma(Q_j)) = \frac{L_{\rho_j}(\Gamma(Q_j))^2}{A_{\rho_j}(Q_j)} = A_{\rho_j}(Q_j) \tag{10}$$

y de aquí que $L_{\rho_j}(\Gamma(Q_j)) = A_{\rho_j}(Q_j)$.

Ahora, notemos que si $\gamma \in \Gamma(Q)$, tenemos que es la unión de dos curvas $\gamma_1 \in \Gamma(Q_1)$ y $\gamma_2 \in \Gamma(Q_2)$, entonces

$$\begin{aligned} l_\rho(\gamma) &= \int_\gamma \rho|dz| \qquad (11) \\ &= \int_{\gamma_1} \rho_1|dz| + \int_{\gamma_2} \rho_2|dz| \\ &\geq L_{\rho_1}(\Gamma(Q_1)) + L_{\rho_2}(\Gamma(Q_2)), \end{aligned}$$

luego, tomando ínfimo sobre todas las curvas en $\Gamma(Q)$,

$$L_\rho(\Gamma(Q)) \geq L_{\rho_1}(\Gamma(Q_1)) + L_{\rho_2}(\Gamma(Q_2)) \tag{12}$$

Por tanto, de (9) y (12)

$$\begin{aligned} M = \lambda(\Gamma(Q)) &\geq \frac{(L_\rho(\Gamma(Q)))^2}{A_\rho(Q)} \geq \frac{(L_{\rho_1}(\Gamma(Q_1)) + L_{\rho_2}(\Gamma(Q_2)))^2}{A_{\rho_2}(Q_1) + A_{\rho_2}(Q_2)} \\ &= \frac{(A_{\rho_2}(Q_1) + A_{\rho_2}(Q_2))^2}{A_{\rho_2}(Q_1) + A_{\rho_2}(Q_2)} = M_1 + M_2 \end{aligned} \tag{13}$$

y por tanto $modQ \geq modQ_1 + modQ_2$. Ahora, si tuviésemos la igualdad en esta expresión, se obtendría que

$$M_1 + M_2 = \lambda(\Gamma(Q)) \geq \frac{(L_\rho(\Gamma(Q)))^2}{A_\rho(Q)} \geq M_1 + M_2 \tag{14}$$

Por tanto el supremo se realiza en ρ y en consecuencia $\rho|dz|$ es métrica extrema para $\Gamma(Q)$. Pero como Q es un rectángulo, entonces ρ debe ser idénticamente 1 (pues la longitud extrema de rectángulos se realiza en la métrica euclídea); esto quiere decir que $\rho_j(z) = |f_j'(z)| = 1$ y en consecuencia f_1 y f_2 son funciones del tipo $az + b$ con $|a| = 1$, de modo que Q_1 y Q_2 deben ser rectángulos.

□

Por medio de inducción y de la proposición anterior obtenemos directamente el siguiente resultado.

Corolario 2. Sea Q un cuadrilátero. Considere $n-1$ curvas disjuntas en Q las cuales conectan sus lados horizontales y descomponen a Q en la unión disjunta de cuadriláteros $Q_1, Q_2, ..., Q_n$. Entonces,

$$\text{mod } Q \geq \sum_{j=1}^{n} \text{mod } Q_j \tag{15}$$

y la igualdad se tiene si y sólo si todos los cuadriláteros Q_j son rectángulos.

Mediante una prueba análoga se obtiene un resultado similar acerca de dominios anulares.

Proposición 3. Sea A un dominio anular. Sean $A_1, A_2, ..., A_n \subset A$ dominios anulares disjuntos que separan las componentes del complemento de A. Entonces

$$\text{mod } A \geq \sum_{j=1}^{n} \text{mod } A_j \tag{16}$$

y la igualdad se tiene si y sólo si $A = \sqcup A_j$ y todos los dominios anulares A_j son anillos concéntricos.

Corolario 3. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un anillo acotado y $A_1, A_2, ... \subset A$ una sucesión de anillos concéntricos disjuntos tales que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \text{mod } A_j = \infty. \tag{17}$$

Entonces la componente acotada de $\mathbb{C} - A$ es un solo punto.

Prueba. Si la componente acotada del complemento de A no consistiera de un solo punto, entonces su radio menor sería positivo y en consecuencia mod $A < \infty$; pero por la proposición anterior tenemos que

$$\infty > \text{mod } A \geq \sum_{j=1}^{\infty} A_j = \infty \tag{18}$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Bibliografía

[1] E. de Faria W. de Melo, *Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics*, Cambridge, 2008.

[2] M. Krook, F. Carrier, E. Pearson, *Functions of a Complex Variable: Theory and Technique*, SIAM, 2005.

[3] J. Ablowitz, S. Fokas, *Complex Variables: Introduction and Applications*, Cambridge University Press, 2003.

[4] Y. Jiang, *Renormalization and Geometry in One-Dimensional and Complex Dynamics*, World Scientific, 1996.

[5] V. Ahlfors, *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory*, AMS, 2010.

[6] C. Caratheodory, *Conformal Representation*, Cambridge, 1969.