Homeomorfismos Cuasiconformes

Francisco Juárez Lucas

30 Abril de 2012

1. Homeomorfismos Cuasiconformes

El concepto de la cuasiconformalidad de un función se puede abordar en una forma que lo hace totalmente independiente de cualquier suavidad de la función. Por lo tanto podemos hablar de homeomorfismos cuasiconformes.

Definición 1 ***(Homeomorfismos Cuasiconformes)*** *Sea $K \geq 1$. Un homeomorfismo que preserva orientación $f : U \to V$ entre dominios de la esfera de Riemann es K-cuasiconforme si, para cualquier cuadrilátero Q cuya cerradura está contenida en U, tenemos*

$$\frac{1}{K} mod\, Q \leq mod\, f(Q) \leq K mod\, Q.$$

En particular, cualquier difeomorfismo K-cuasiconforme es un homeomorfismo K-cuasiconforme. Algunas consecuencias inmediatas de la definición son las siguientes.

Observación 1 *Sea $f : U \to V$ un homeomorfismo K-cuasiconforme entonces f^{-1} es un homeomorfismo K-cuasiconforme.*

En efecto; Claramente la inversa de un homeomorfismo es un homeomorfismo. Sea $Q' \subset V$ un cuadrilátero. Entonces $f^{-1}(Q')$ es un cuadrilátero, pues f es un homeomorfismo. Dado que f es K-cuasiconforme, tenemos que

$$\tfrac{1}{K} mod\, f^{-1}(Q') \leq mod\, f(f^{-1}(Q')) \leq K mod\, f^{-1}(Q'),$$

es decir,

$$\tfrac{1}{K} mod\, f^{-1}(Q') \leq mod\, Q' \leq K mod\, f^{-1}(Q'),$$

claramente de la desigualdad anterior concluimos que

$$\tfrac{1}{K} mod\, Q' \leq mod\, f^{-1}(Q') \leq K mod\, Q'.$$

Por lo tanto, f^{-1} es un homeomorfismo K-cuasiconforme.

Observación 2 *Sean $f : U \to V$, $g : V \to W$ homeomorfismos K_1, K_2-cuasiconformes respectivamente entonces $g \circ f$ es un homeomorfismo $K_1 K_2$-cuasiconforme.*

En efecto; Claramente la composicion de dos homeomorfismos es un homeomorfismo. Sea $Q \subset U$ un cuadrilátero. Dado que f es K_1-cuasiconforme, tenemos que

$$\frac{1}{K_1} mod\, Q \leq mod\, f(Q) \leq K_1 mod\, Q \tag{1}$$

Como g es K_2-cuasiconforme, tenemos que

$$\frac{1}{K_2} mod\, f(Q) \leq mod\, g(f(Q)) \leq K_2 mod\, f(Q), \tag{2}$$

pues $f(Q)$ es un cuadrilátero.
De la desigualdad (1), tenemos que

$$\frac{1}{K_1 K_2} mod\, Q \leq \frac{1}{K_2} mod\, f(Q)$$

y

$$K_1 K_2 mod\, f(Q) \leq K_2 mod\, Q.$$

Sustituyendo en la desigualdad (2), tenemos que

$$\frac{1}{K_1 K_2} mod\, Q \leq mod\, g(f(Q)) \leq K_1 K_2 mod\, Q$$

Por lo tanto, $g \circ f$ es un homeomorfismo K_1K_2-cuasiconforme.

Mas adelante veremos que la cuasiconformalidad es un propiedad local y que cada homeomorfismo 1-cuasiconforme es conforme.

Definición 2 *Un homeomorfismo f es localmente K-cuasiconforme si para cada punto existe una vecindad tal que la restricción de f a está vecindad es K-cuasiconforme.*

Teorema 1 *Si $f : U \to V$ es un homeomorfismo localmente K-cuasiconforme entonces f es K-cuasiconforme.*

PRUEBA. Sea Q un cuadrilátero de módulo M cuya cerradura está contenida en U y M' el módulo de su imagen Q'. Luego, descomponemos a Q en n cuadriláteros $Q_1, \ldots, Q_n$ usando líneas verticales en las coordenadas canónicas de Q. Así, por el corolario 4.2.8 se sigue que el módulo de Q es igual a la suma de los módulos M_j de Q_j, es decir,

$$M = \sum_{j=1}^{n} M_j. \tag{3}$$

Sea Q'_j la imagen de Q_j entonces

$$M' \geq \sum_{j=1}^{n} M'_j, \tag{4}$$

donde M'_j es el módulo de Q'_j. De manera similar, descomponemos cada Q'_j en pequeños cuadriláteros $Q'_{j,k}$ usando segmentos horizontales en las coordenadas canónicas de Q'_j. Asi,

$$\frac{1}{M'_j} = \sum_k \frac{1}{M'_{j,k}}, \tag{5}$$

donde $M'_{j,k}$ es el módulo de $Q'_{j,k}$. Si $M_{j,k}$ es el módulo de $Q_{j,k} = f^{-1}(Q'_{j,k})$ entonces

$$\frac{1}{M_j} \geq \sum_k \frac{1}{M_{j,k}}. \tag{6}$$

Finalmente, si ambas descomposiciones son lo suficientemente finas entonces dado un punto en $z \in Q_{j,k}$ existe una vecindad de z tal que contenga a la cerradura de $Q_{j,k}$ y así $M_{j,k} \leq KM'_{j,k}$, pues f es localmente K-cuasiconforme. Combinando está desigualdad con las ecuaciones (5) y (6), tenemos que

$$\frac{1}{M_j} \geq \sum_k \frac{1}{M_{j,k}} \geq \frac{1}{K} \sum_k \frac{1}{M'_{j,k}} = \frac{1}{K}\frac{1}{M'_j},$$

es decir $KM'_j \geq M_j$, y tomando sumas se sigue que $K\sum_{j=1}^n M'_j \geq \sum_{j=1}^n M_j$. Por lo tanto, de las ecuaciones (3) y (4) obtenemos

$$M \leq KM'.$$

La otra desigualdad se prueba usando f^{-1}, es decir, $M' \leq KM$. Combinando las dos últimas desigualdades se sigue que $\frac{1}{K}M \leq M' \leq KM$ y por lo tanto f es un homeomorfismo K-cuasiconforme. ∎

Teorema 2 *Si $f : U \to V$ es un homeomorfismo 1-cuasiconforme entonces es conforme.*

PRUEBA. Dado que cada punto de U está en el interior de un cuadrilátero, es suficiente probar la conformalidad de dicha función 1-cuasiconforme en tal cuadrilátero. Sean Q un cuadrilátero, cuya cerradura está contenida en U y Q' su imagen. Luego, tomamos $M = mod\ Q$ y sean ϕ_1 el mapeo canónico de Q y ϕ_2 el mapeo canónico de Q', es decir, ϕ_1 y ϕ_2 mandan conformemente Q y Q' sobre rectángulos R y R' respectivamente. Dado que f es 1-cuasiconforme tenemos que $mod\ Q = mod\ f(Q)$, por lo que $R' = R = R(0, M, M+i, i)$. Por otro lado, ϕ_1 y ϕ_2 son homeomorfismos 1-cuasiconformes y por lo que $g = \phi_2 \circ f \circ \phi_1 : R \to R$ es un homeomorfismo 1-cuasiconforme. Es suficiente probar que g es la identidad, pues si hacemos $w = \phi_1(z)$ y dado que $f \circ \phi_1(z) = \phi_2^{-1}(z)$ se sigue que $f(w) = \phi_2^{-1} \circ \phi_1^{-1}(w)$ es conforme, pues ϕ_1^{-1} y ϕ_2^{-1} son conformes. En efecto; sea $z \in R$ y descomponemos el rectángulo R en dos rectángulos R_1, R_2 por la línea que pasa a través de z. Dado que g es 1-cuasiconforme, tenemos que $M = M_1 + M_2$, $M'_1 = M_1$, $M'_2 = M_2$ y $M = M'$. Así, $M' = M'_1 + M'_2$ y por

la proposición 4.2.7 la imagen R'_1 de R_1, es un rectángulo que tiene el mismo módulo que R_1, por lo que coincide con R_1. Por lo tanto, $Re\ g(z)$ es igual a $Re\ z$, pues $mod\ R'_1 = mod\ R_1$.
De manera similar, concluimos que $Im\ g(z)$ es igual a $Im\ z$, esto mediante la línea horizontal que pasa a través de z. Así, $g(z) = z$ y dado que z es arbitrario se sigue que es la identidad y por lo tanto f es conforme. ■

Corolario 1 *Sea $f : U \to V$ un homeomorfismo y $\hat{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ un levantamiento de f para el cubriente universal holomorfo de los espacios U y V. Entonces f es un homeomorfismo K-cuasiconforme si y sólo si $\hat{f}$ es un homeomorfismo K-cuasiconforme.*

Prueba. Consideremos el siguiente diagrama. Sabemos que existen π_1 y π_2 cubrientes holomorfos tal que son homeomorfismos locales y por lo tanto 1-cuasiconformes.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathbb{D} \arrow[d, "\pi_2"] \\ U \arrow[r, "f"'] & V \end{tikzcd}$$

Supongamos que f es un homeomorfismo K-cuasiconforme. Sea Q un cuadrilátero tal que su cerradura está contenida en $\mathbb{D}$. Como en la demostración del Teorema 1, descomponemos a Q en cuadriláteros pequeños Q_j tal que π_1 sea un homeomorfismo local en cada Q_j y notemos que π_2^{-1} es un homeomorfismo local en cada cuadrilátero $f(\pi(Q_j))$. Por lo tanto, $\hat{f} = \pi_2^{-1} \circ f \circ \pi_1$ es un homeomorfismo localmente K-cuasiconforme y por el Teorema 2 se sigue que es K-cuasiconforme.
De igual manera, supongamos que $\hat{f}$ es un homeomorfismo K-cuasiconforme. Utilizando el mismo razonamiento anteriormente, concluimos que $f = \pi_2 \circ \hat{f} \circ \pi_1^{-1}$ es un homeomorfismo localmente K-cuasiconforme y por el Teorema 2 se sigue que es K-cuasiconforme. ■
También es posible definir cuasiconformalidad utilizando la distorsión de los módulos de anillos en lugar de cuadriláteros. Ver [4] para la demostración del siguiente teorema.

Teorema 3 *Un homeomorfismo que preserva orientación es K-cuasiconforme si y sólo si para cada anillo topológico A cuya cerradura está contenida en un dominio, tenemos que*

$$\frac{1}{K} mod\ A \leq mod\ f(A) \leq K mod\ A.$$

El teorema se sigue por que podemos usar cuadrilateros para estimar el módulo de un anillo y anillos para estimar el módulo de un cuadrilátero.
De ahora en adelante consideraremos homeomorfismos cuasiconformes del disco. A continuación vamos a describir la distorsión de homeomorfismos cuasiconformes del disco con respecto a la distancia inducida por la métrica hiperbólica.

Lema 1 *Existe una función estrictamente monótona, continua y sobreyectiva* m : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$*tal que, dados cualesquiera dos puntos* $p, q \in \mathbb{D}$*, existe un anillo* A *y una función cubriente holomorfa de grado 2,* $\phi_{p,q} : A \to \mathbb{D} \setminus \{p, q\}$ *tal que el módulo de* A *es igual a* $m(d(p, q))$*, donde* $d(p, q)$ *es la distancia entre* p *y* q *en la métrica hiperbólica.*

Prueba. Considere la función racional $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ dada por $f(z) = z + z^{-1}$. Observemos que ésta función tiene dos puntos críticos cuadráticos -1,1 y dos valores críticos -2,2. Notemos que f manda homeomorficamente cada uno de los dos circulos de radio $R > 1$ y $1/R$ sobre la elipse E_R centrado en 0 con el eje mayor $R + R^{-1}$ en el eje real y eje menor $R - R^{-1}$ en el eje imaginario, pues tomamos $z = Re^{i\theta}$ y sustituyendo en f tenemos que

$$\begin{aligned} f(Re^{i\theta}) &= Re^{i\theta} + \frac{1}{R}e^{-i\theta} \\ &= R(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{R}(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= (R + \frac{1}{R})\cos\theta + i(R - \frac{1}{R})\sin\theta, \end{aligned}$$

que es claramente una elipse. Similarmente para $\frac{1}{R}$.
Sea $A_R = \{z \in \mathbb{C} | R^{-1} < |z| < R\}$ y notemos que $f : A_R \setminus \{-1, 1\} \to E_R \setminus \{-2, 2\}$ es una función cubriente y es de grado 2, pues dado $w \in E_R$ tenermos que $f(z) = w$, es decir, $z + \frac{1}{z} = w$ y esto implica que $z^2 - wz + 1 = 0$ que es una ecuación cuadrática con dos soluciones en $\mathbb{C}$. Por el lema de Schwarz, la distancia hiperbólica entre los puntos -2 y 2 en la métrica hiperbólica de E_R es una función estrictamente monótona de R, que tiende a 0 cuando $R \to \infty$ y tiende a ∞ cuando $R \to 1$. Puesto que es claramente continua, se deduce que está función es sobreyectiva en $\mathbb{R}^+$. Por lo tanto, dados cualesquiera dos puntos $p, q \in \mathbb{D}$ existe un valor único de $R > 1$ tal que la distancia hiperbólica entre -2 y 2 en la métrica hiperbólica de E_R es igual a la distancia hiperbólica entre p, q. Luego, por el Teorema del mapeo de Riemann existe una biyección conforme $\phi : E_R \to \mathbb{D}$ que manda -2 a p y 2 a q. Luego, $\phi_{p,q} = \phi^{-1} \circ f_{A_R}$ es la función cubriente requerida, siempre y cuando tomemos $m(d) = mod\ A_R = \pi / \log R$.
■

Referencias

[1] Edson de Faria and Welington de Melo, *Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics.* Cambridge University Press, USA, 2008.

[2] E.M. Stein and R. Shakarchi, *Complex Analysis.* Princeton University Press, 2003.

[3] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis.* McGraw-Hill 1979.

[4] O. Lehto and K. I. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane* Springer-Verlag, USA, 1973.