VARIABLE COMPLEJA II

HOMEOMORFISMOS K-CUASICONFORMES.
Juan Ahtziri González Lemus
Mayo, 2012

Teorema 1: *Si $\phi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es homeomorfismo K-cuasiconforme, entonces:*

$$\frac{m(d(p,q))}{K} \leq m(d(\phi(p),\phi(q))) \leq Km(d(p,q))$$

donde d es la distancia hiperbólica en $\mathbb{D}$. En particular, la familia de homeomorfismos K-cuasiconformes en $\mathbb{D}$ es equicontinua con la métrica hiperbólica.

Demostración. Dados $p, q \in \mathbb{D}$, sabemos que existen anillos A, A' (lema 4.3.6) con $mod\ A = m(d(p,q))$ y $mod\ A' = m(d(\phi(p),\phi(q)))$ que cubren a $\mathbb{D} - \{p,q\}$ y $\mathbb{D}\{\phi(p),\phi(q)\}$ respectivamente. El levantamiento de ϕ es un K-homeomorfismo entre A y A', por lo tanto se cumple:

$$\frac{mod\ A}{K} \leq mod\ A' \leq Kmod\ A.$$

Dado $z_0 \in \mathbb{D}$, como m es estrictamente creciente y $m(d(\phi(z_0),\phi(z))) \leq Km(d(z_0,z))$ se cumple para todo ϕ homeomorfismo K-cuasiconforme de $\mathbb{D}$, entonces existe r_K tal que $d(\phi(z_0),\phi(z)) \leq r_K d(z_0,z)$. Por lo tanto dado $\epsilon > 0$, $\delta = \epsilon/r_K$ sirve para cumplir la definición de equicontinuidad en z_0, el resultado se sigue por que comenzamos con un z_0 arbitrario.#

Corolario (compacidad): *Si $K > 1$ y $R > 0$, entonces el conjunto $\mathcal{K}_R := \{f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D} \mid f$ es homeo K-cuasiconforme y $d(f(0),0) \leq R\}$ es compacto en el espacio de funciones continuas de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{C}$ dotado con la topología de la convergencia uniforme en compactos.*

Demostración. Sean $\{\phi_n\} \subset \mathcal{K}_R$ y $R' > 0$ tal que $Km(R) \leq m(R')$. Como $\{\phi_n^{-1}\} \subset \mathcal{K}_R$ tenemos que:

$$m(d(\phi_n^{-1}(0),0) \leq Km(d(0,\phi_n(0))) \leq Km(R) \leq m(R'),$$

de la monotonía de m se sigue que $d(\phi_n^{-1}(0),0) \leq R'$. Luego $\{\phi_n(0)\}$ y $\{\phi_n^{-1}(0)\}$ tienen subsucesión convergente, por comodidad supondremos que ellas son convergentes. El teorema anterior y el hecho de que las métricas Hiperbólica y Euclideana son equivalentes[1] en cualquier bola centrada en 0

[1] *i.e* existen $c_1, c_2 > 0$ tales que $c_1 d_e(x,y) \leq d(x,y) \leq c_2 d_e(x,y)$ para todas $x, y \in B_r(0)$, donde d_e es la métrica euclideana.

y contenida en $\mathbb{D}$, concluimos que las sucesiones $\{\phi_n\}$ y $\{\phi_n^{-1}\}$ son equicontinuas en la métrica Euclideana. Por el teorema de Arzelá-Ascoli $\phi_n \to \Phi$ y $\phi_n^{-1} \to \Psi$ (el teorema nos da subsucesiones convergentes, pero por comodidad pensaremos que las sucesiones originales convergen) de manera uniforme en compactos de $\mathbb{D}$.

Del teorema anterior sabemos que para toda n, $m(d(\phi_n(x), \phi_n(0))) \leq Km(d(x,0))$. Escogiendo P_x tal que $Km(d(x,0)) \leq m(P_x)$ y utilizando la monotonía de m tenemos $d(\phi_n(x), \phi_n(0)) \leq P_x$ para toda n, luego

$$d(\phi_n(x), 0) \leq d(\phi_n(x), \phi_n(0)) + d(\phi_n(0), 0) \leq P_x + R$$

y por lo tanto $d(\phi_n(x), 0)$ está uniformemente acotada, *i.e.* la cota no depende de n. De manera que para toda $x \in \mathbb{D}, \Phi(x) \in \mathbb{D}$ (análogamente se prueba que $\Psi(x) \in \mathbb{D}$). De la convergencia de las dos sucesiones, concluimos que $\Phi^{-1} = \Psi$ (pues la sucesión $\phi_n \circ \Psi$ converge a $\Phi \circ \Psi(x)$ y por otro converge a la identidad).

Para probar que Φ es K-cuasiconforme, tomemos un anillo $A \subset \mathbb{D}$ tal que $\bar{A} \subset \mathbb{D}$. Dado $\epsilon > 0$, escojemos $A_\epsilon \subset A$ un anillo tal que $\bar{A}_\epsilon \subset A$, A_ϵ separa las componentes de $\hat{\mathbb{C}} - A$ y $mod\ A_\epsilon > mod\ A - \epsilon$ (A_ϵ existe pues si $f\colon A \to \mathcal{A}$ es el mapeo canónico, escojemos $\mathcal{A}'_\epsilon \subset \mathcal{A}$ que satisfaga las condiciones y luego hacemos $A_\epsilon = f^{-1}(\mathcal{A}'_\epsilon)$). Ahora como ϕ_n converge uniformemente en $\bar{A}_\epsilon$, tenemos que para n suficientemente grande $\phi_n(A_\epsilon) \subset \Phi(A)$. Por lo tanto se cumple

$$mod\ \Phi(A) \geq mod\ \phi_n(A_\epsilon) \geq \frac{mod\ A_\epsilon}{K} \geq \frac{mod\ A - \epsilon}{K},$$

haciendo tender ϵ a 0, concluimos que $mod\ \Phi(A) \geq \frac{mod\ A}{K}$.

Para la otra desigualdad, consideremos $A'_\epsilon \subset \mathbb{D}$ tal que $\bar{A}'_\epsilon \subset \mathbb{D}$, $A \subset A'_\epsilon$ separa las componentes $\hat{\mathbb{C}} - A'_\epsilon$ y $mod\ A'_\epsilon \leq mod\ A + \epsilon$ (análogamente que con A_ϵ, vemos que existe A'_ϵ). Ahora como ϕ_n converge uniformemente en $\bar{A}'_\epsilon$, tenemos que para n suficientemente grande $\Phi(A) \subset \phi_n(A'_\epsilon)$, luego

$$mod\ \Phi(A) \leq mod\ \phi_n(A'_\epsilon) \leq Kmod\ A'_\epsilon \leq K(mod\ A - \epsilon),$$

haciendo tender ϵ a 0, concluimos que $mod\ \Phi(A) \leq Kmod\ A.\#$