Teorema de Ahlfors - Bers

Malors Emilio Espinosa Lara

1 Preliminares

Iniciemos mencionando que el conjunto de las funciones C^∞ de soporte compacto se denota por C_0^∞. Recordemos los siguientes teoremas vistos al incio del curso:

Preliminar 1:

Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua cuyas derivadas distribucionales $f_z, f_{\overline{z}}$ son tales que $|f_z|^p, |f_{\overline{z}}|^p$ son localmente integrables en Ω, para algún $p \geq 1$. Entonces para cualquier conjunto compacto $K \subset \Omega$ existe una sucesión $f_n \in C_0^\infty$ tal que f_n converge uniformemente a f en K y tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \iint_K |\partial f_n - f_z|^p dxdy = 0$$

y también,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_K |\overline{\partial} f_n - f_{\overline{z}}|^p dxdy = 0.$$

Notemos que este teorema nos dice que podemos aproximar funciones continuas con funciones C^∞ de soporte compacto, y un corolario de la demostración (que no pondremos aquí) nos asegura que dicho soporte puede tomarse dentro del compacto K. También tenemos el siguiente teorema:

Fórmula de Pompeiu:

Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua cuyas derivadas distribucionales $\partial f, \overline{\partial} f$ son localmente integrables para algun $2 < p < \infty$. Sea D un disco con $\overline{D} \subset \Omega$, entonces para todo $z \in \Omega$ tenemos que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta + \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{\overline{\partial} f(\eta)}{\eta - z} d\eta \wedge \partial\overline{\eta}.$$

Mucho del trabajo que haremos será siempre pensando en el sentido de derivadas distribucionales. Utilizaremos la siguiente definición:

Definición (Tangente a la identidad en infinito):

Decimos que una función $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ es tangente a la identidad en ∞ si podemos escribir:

$$f(z) = z + O(\tfrac{1}{z}).$$

Finalmente recordamos algunas cosas de Teoría de la medida:

Norma infinito:

Dada una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definimos una *norma esencial* como un $C \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq C$ para casi todo $z \in \Omega$. Definimos su *norma infinito*, $||f||_\infty$, como el infimo de dichas cotas esenciales.

Tenemos el siguiente teorema que nos será útil:

Desigualdad de Holder:

Si $1 \leq p, q \leq \infty$ son conjugados y Ω es medible, entonces se cumple que:

$$\iint_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \left(\iint_\Omega |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_\Omega |g(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Definición(Localmente integrable):

Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$, decimos que es *localmente integrable* en L^p si $f \in L^p(K)$. También decimos que f está localmente en L^p.

2 Teorema de Ahlfors-Bers

Dados los comentarios de la sección anterior ahora podemos dar el enunciado del Teorema de Ahlfors-Bers:

Teorema de Ahlfors-Bers:

Sea U un dominio de la esfera de Riemann.

1. Dada una función medible $\mu : U \to \mathbb{D}$ tal que $||\mu||_\infty < 1$ existe un homeomorfismo cuasiconforme $f : U \to V$que es solución a la ecuación de Beltrami: $\overline{\partial} f = \mu \partial f$. Cualesquiera dos soluciones difieren por post-composición con una difeomorifsmo holomorfo. En particular, si U es la esfera de Riemann entonces existe una única solución que fija tres puntos dados.

2. Sea Λ un abierto de un espacio complejo de Banach y consideremos un mapa

$$\Lambda \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}, (\lambda, z) \mapsto \mu_\lambda(z)$$

tal que se satisfacen las siguientes dos propiedades:

- Para cada λ la función μ_λ es medible, y $||\mu_\lambda|| < k$, para algún $k < 1$.
- Para casi todo z, el mapa $\Lambda \to \mathbb{D}$ dado por $\lambda \mapsto \mu_\lambda(z)$ es holomorfo.

Para cada λ sea f_λ el único mapa cuasiconforme de la esfera de Riemann que fija $0, 1, \infty$ y cuyo coeficiente de Beltrami es μ_λ. Entonces el mapa $\lambda \to f_\lambda(z)$ es holomorfo para cada z.

Nosotros probaremos únicamente la primera parte del teorema. Lo haremos dividiendo la prueba en 7 pasos, a continuación se enlista la idea esencial que se llevará acabo en cada paso.

1. Demostraremos que basta considerar μ con soporte compacto.
2. Estudiamos, mediante un lema, los homeomorfismos cuasiconformes que tienen dilatación compleja con soporte compacto.
3. Obtenemos cierta cota que nos asegura continuidad de tipo Holder para ciertas funciones.
4. Definimos la ecuación generalizada de Beltrami.
5. Resolvemos la ecuación generalizada de Beltrami.
6. Vemos que la ecuación generalizada de Beltrami tiene soluciones que son difeomorfismos.
7. Demostramos que la ecuación de Beltrami siempre tiene solución concluyendo la demostración.

3 Paso 1

Supongamos que podemos resolver la ecuación de Beltrami para cualquier forma de Beltrami que tiene soporte en el disco unitario (en particular, esto nos dice que es compacto por ser acotado). Dada $\mu \in L^\infty(\overline{\mathbb{C}})$ con $||\mu||_\infty < 1$, definamos μ_0 como:

$$\mu_0(z) = 0 \text{ si } z \in \mathbb{D}$$
$$\mu_0(z) = \mu(z) \text{ en otro caso.}$$

Es medible pues para cualquier conjunto medible A de la esfera de Riemann ocurre uno de tres casos:

- A se encuentra en $\mathbb{D}^c$ en cuyo caso el resultado se sigue de que μ es medible,
- A se encuentra en $\mathbb{D}$ en cuyo caso el resultado se sigue de que $\{0\}$ es medible,

- A intersecta a $\mathbb{D}$ y a su complemento, en cuyo caso se tiene el resultado pues $\mathbb{D}^c \cap A$ es medible.

Más aún, como trabajamos con la norma infinito y el valor de μ fue alterado en $\mathbb{D}$ volviéndolo 0 las cotas esenciales que acotaban a μ siguen acotando a μ_0. Por lo tanto, $||\mu_0||_\infty < 1$. Consideremos ahora la función:

$$\mu_0^*(z) = \frac{\mu_0(\frac{1}{z})z^2}{\overline{z}^2}.$$

Como dividir, multiplicar y componer funciones medibles no destruye la medibilidad obtenemos que esta función es medible. Más aún, como z y $\overline{z}$ tienen la misma norma entonces las cotas esenciales de μ_0 son las mismas que las de μ_0^*. De allí que $||\mu_0^*||_\infty < 1$. Notemos que el soporte de esta función se encuentra en $\mathbb{D}$, esto por que $\frac{1}{z}$ es una función que cambia de coordenada y como μ_0 se anula en el disco entonces μ_0^* se anula fuera de él. Por nuestra suposición existe $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ tal que:

$$\overline{\partial} g = \mu_0^* \partial g.$$

Ahora definamos:

$$f_0(z) = \frac{1}{g(\frac{1}{z})}.$$

Se tiene que f_0 es un homeomorfismo conforme y por lo tanto $f_0'(z)$ existe en $\mathbb{D}$ y se anula en una cantidad finita de puntos. Gracias a esto podemos definir:

$$\mu_1(w) = \frac{\mu(f_0^{-1}(w))f_0'(f_0^{-1}(w))}{\overline{f_0'(f_0^{-1}(w))}}.$$

en el conjunto $f(\mathbb{D}) = W$, el cual es acotado por ser f_0 un homeomorfismo. Si definimos $\mu_1(w) = 0$ en $\mathbb{D}^c$, entonces tendremos que μ_1 tiene soporte compacto por estar contenido en W. Nuevamente, por la hipótesis tenemos que existe $f_1 : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ que es solución a la ecuación de Beltrami utilizando μ_1. Entonces la función

$$f = f_1 \circ f_0$$

es una función tangente a la identidad en ∞ y tal que $\mu_f = \mu$.

4 Paso 2

A partir de ahora supondremos que μ tiene soporte compacto en $\mathbb{C}$. Probaremos el siguiente:

Lema 1:

Sea $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ un homeomorfismos cuasiconforme con las siguientes propiedades:

1. f es tangente a la identidad en ∞,
2. $\mu_f \in L^\infty(\overline{\mathbb{C}})$ tiene soporte compacto en $\mathbb{C}$,
3. ∂f es localmente L^p para algun $p > 2$.

Entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$f(z) = z + \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\mu_f(\eta)\partial f(\eta)}{\eta - z} d\eta \wedge d\overline{\eta}.$$

Demostración:

Como $\overline{\partial} f = \mu_f \partial f$ y μ_f pertenece a L^∞ entonces se tiene que $\overline{\partial} f$ también está en L^p localmente. Ahora, dado $z \in \mathbb{C}$ sea $D = D(0, R)$ un círculo de radio R suficientemente grande y centrado en 0 tal que contenga a z y al soporte de μ_f (existe por (2)).
Por (1) podemos escribir $f(z) = z + \psi(z)$, donde $\psi(z)$ es holomorfa en $\overline{\mathbb{C}} - D$ y $\psi(\eta) = O(\frac{1}{\eta})$. Esto nos dice:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = z + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\psi(\eta)}{\eta - z} d\eta$$

Como $\psi(z) = O(\frac{1}{z})$, existe $N > 0$ tal que $|\psi(z)| < \dfrac{M}{|z|}$ si $|z| > N$. De aquí se sigue que: $\dfrac{|\psi(\eta)|}{|\eta - z|} \leq \dfrac{M}{|\eta|||\eta| - |z||} = \dfrac{M}{R(R - |z|)} \to 0$ cuando $R \to \infty$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta \right| &\leq \frac{2\pi R}{2\pi} \frac{M}{R(R - |z|)} \\ &= \frac{M}{R - |z|} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, al sustituir en la fórmula de Pompeiu se obtiene:

$$f(z) = z + \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\mu_f(\eta)\partial f(\eta)}{\eta - z} d\eta \wedge d\overline{\eta}.$$

pues en la segunda integral se sustituye la ecuación de Beltrami y en la primera integral por el argumento anterior la integral sobre ψ vale 0.

■

5 Paso 3

Denotemos por $QC(k, R)$ el conjunto de todos los homemorfismos conformes $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ tales que $||f||_\infty \leq k < 1$ que satisfacen $1, 2, 3$ del lema 1. Tenemos la siguiente breve proposición que enunciamos sin demostración.

Proposición 2:

Sea $f \in QC(k,R)$, entonces $f^{-1} \in QC(k,4R)$.

También se tiene el siguiente lema:

Lema 3:

Sea $f \in QC(k,R)$ y $p > 2$ tal que $\partial f \in L^p_{loc}$, entonces para todo $z_1, z_2 \in D(0,R)$ se cumple

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq C|z_1 - z_2|^{1-\frac{2}{p}},$$

donde $C > 0$ es una constante que depende k, R y $||\partial f||_p$ en $D(0,R)$.

Demostración:

Sean z_1, z_2 cualesquiera en $D(0,R)$, entonces gracias al Lema 1 podemos escribir:

$$f(z_1) - f(z_2) = z_1 - z_2 + \frac{z_1 - z_2}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\mu_f(\eta)\partial f(\eta)}{(\eta - z_1)(\eta - z_2)} d\eta \wedge d\overline{\eta}.$$

Al aplicar la desigualdad de Holder a la integral en el lado derecho obtenemos:

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq |z_1 - z_2| \left(1 + \frac{k||\partial f||_p}{2\pi} \left(\iint_{\mathbb{C}} \frac{|d\eta \wedge d\overline{\eta}|}{(|(\eta - z_1)(\eta - z_2)|)^q} \right)^{\frac{1}{q}} \right).$$

Ahora acotaremos esta última integral. Sea $2\rho = |z_1 - z_2|$ y definamos

$$D_i = \{z : |z - z_i| < \rho\}, i = 1, 2.$$

Es claro que por definición $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, y entonces se tiene lo siguiente:

$$\iint_{D_1} \frac{|d\eta \wedge d\overline{\eta}|}{(|\eta - z_1||\eta - z_2|)^q} \leq \frac{1}{p^q} \iint_{D_1} \frac{|d\eta \wedge d\overline{\eta}|}{(|\eta - z_1|)^q}.$$

Esta última integral podemos calcularla explicitamente mediante el uso de coordenadas polares y la fórmula de cambio de variable:

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \frac{|d\eta \wedge d\overline{\eta}|}{(|\eta - z_1|)^q} &= |-2i| \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \frac{r d\theta dr}{r^q} \\ &= \frac{4\pi}{2-q} \rho^{2-q}. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que:

$$\iint_{D_1} \frac{|d\eta \wedge d\overline{\eta}|}{(|\eta - z_1||\eta - z_2|)^q} \leq \frac{2^{2q}\pi}{2-q} |z_1 - z_2|^{2-2q}.$$

De forma análoga obtenemos una estimación para D_2:

$$\iint_{D_2} \frac{|d\eta \wedge d\overline{\eta}|}{(|\eta - z_1||\eta - z_2|)^q} \leq \frac{2^{2q}\pi}{2-q}|z_1 - z_2|^{2-2q}.$$

Utilizando la simetria con respecto a la recta $|\eta - z_1| = |\eta - z_2|$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{C}-D_1\cup D_2} \frac{|d\eta \wedge d\overline{\eta}|}{(|\eta - z_1||\eta - z_2|)^q} &\leq 2\iint_{\mathbb{C}-D_1} \frac{|d\eta \wedge d\overline{\eta}|}{|\eta - z_2|^{2q}} \\
&= 4\int_{\rho}^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{rdrd\theta}{2^{2q}} \\
&= \frac{2^{2q}\pi}{q-1}|z_1 - z_2|^{2-2q}
\end{aligned}$$

También notemos lo siguiente:

$$|z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|^{\frac{2}{p}}|z_1 - z_2|^{1-\frac{2}{p}} \leq (2R)^{\frac{2}{p}}|z_1 - z_2|^{1-\frac{2}{p}}$$

donde hemos utilizado que la distancia entre dos puntos de $D(0,R)$ está acotada por la longitud del diametro, es decir, $2R$. Finalmente, sustituyendo todo lo anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}
|f(z_1) - f(z_2)| &\leq |z_1 - z_2|\left(1 + \frac{k||\partial f||_p}{2\pi}\left(\iint_{\mathbb{C}} \frac{|d\eta \wedge d\overline{\eta}|}{(|(\eta - z_1)(\eta - z_2)|)^q}\right)^{\frac{1}{q}}\right) && (1) \\
&\leq |z_1 - z_2|\left(1 + \frac{k||\partial f||_p}{2\pi}\left(\frac{2^{2q}\pi}{q-1}|z_1 - z_2|^{2-2q}\right)^{\frac{1}{q}}\right) && (2) \\
&\leq C|z_1 - z_2|^{\frac{2}{q}-1} && (3) \\
&= C|z_1 - z_2|^{1-\frac{2}{p}}, && (4)
\end{aligned}$$

donde C es alguna constante que depende de k, R y $||\partial f||_p$ como queríamos probar.

■

6 Paso 4

En esta sección haremos simplemente una observación que nos será útil después. Supongamos que $f \in QC(k,R)$ y sea $\psi(z) = f(z) - z$. Podemos notar que ψ tiene las siguientes propiedades:

1. $\partial\psi \in L^p(\mathbb{C})$ para algún $p > 2$,

2. ψ es holomorfa en ∞ y $\psi(z) = O(\frac{1}{z})$,

3. $\overline{\partial}\psi = \mu_f + \mu_f\partial\psi$ casi en todas partes.

Conversamente, si ψ satisface estas tres propiedades y $||\mu||_\infty = k < 1$ entonces podría esperarse que $f(z) = z + \psi(z)$ sea un homeomorfismo cuasiconforme en $QC(k, R)$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición:

Sean ψ, ν funciones en L^∞. La ecuación

$$\overline{\partial}\psi = \nu + \mu\partial\psi,$$

se conoce como la *ecuación generalizada de Beltrami.*

7 Paso 5:

En esta sección resolveremos la ecuación generalizada de Beltrami valiéndonos de un resultado que enunciaremos sin demostración. Comenzaremos notando algunas cosas que motivarán nuestra necesidad de cierto teorema. Supongamos que ψ es una solución a la ecuación generalizada de Beltrami con μ, ν de soporte compacto y $\partial\psi, \overline{\partial}\psi \in L^p(\mathbb{C})$, entonces tenemos que:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\overline{\partial}\psi(\eta)}{\eta - z} d\eta \wedge \bar{(}\eta).$$

Si consideramos el operador T definido por:

$$T\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\eta)}{\eta - z} d\eta \wedge \overline{\eta},$$

estamos diciendo que $\psi = T(\overline{\partial}\psi)$. Este es un operador no acotado, lo cual dificulta trabajar con él. Sin embargo, podemos escribir:

$$\partial\psi = \partial(T(\overline{\partial}\psi)) = S(\overline{\partial}\psi),$$

donde S es la *transformada de Beurling*, dada por:

$$S\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\eta)}{(\eta - z)^2} d\eta \wedge d\overline{\eta}$$

donde entendemos esta integral como:

$$S\phi(z) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i}\iint_{|\eta - z| > \epsilon} \frac{\phi(\eta)}{(\eta - z)^2} d\eta \wedge d\overline{\eta}.$$

Tenemos el siguiente teorema que enunciamos sin demostración:

Teorema de Calderón-Zygmund:

La transformada de Beurling se extiende a un operador acotado $S : L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ para cualquier $1 < p < \infty$. Más precisamente, existe una función continua logarítmicamente convexa $p \mapsto C_p > 0$ con $C_2 = 1$ tal que $||S\phi||_p \leq C_p||\phi||_p$

para toda $\phi \in L^p(\mathbb{C})$.

Con este teorema a la mano podremos resolver la ecuación de Beltrami:

Teorema (Beltrami Generalizado):

Sean $\mu, \nu \in L^p(\mathbb{C})$ con soporte compacto y $||\mu||_\infty < 1$. Entonces existe una único mapa continuo $\psi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ que es holomorfo cerca de ∞, satisface $\psi(z) = O(\frac{1}{z})$ y tal que:

$$\overline{\partial}\psi = \nu + \mu\partial\psi$$

casi en todas partes. Más aún, $\partial\psi, \overline{\partial}\psi \in L^p(\mathbb{C})$ para algun $p > 2$.

Demostración:

Sea $k = ||\mu||_\infty < 1$ y sea $p > 2$ tal que $kC_p < 1$, donde C_p es la constante dada por el teorema de Calderón-Zygmund(C-Z). Supongamos que ψ es una solución, entonces la ecuación:

$$\phi = \nu + \mu S(\phi)$$

debe ser resuelta por $\overline{\partial}\psi$ en L^p (por hipótesis del teorema). Así que lo que haremos será resolver esta ecuación en L^p. Sea $\phi_0 = \mu S(\nu)$ y definamos inductivamente $\phi_{n+1} = \mu S(\phi_n) \in L^p(\mathbb{C})$. Utilizando la desigualdad dada en C-Z tenemos:

$$||\phi_{n+1}||_p = ||\mu S(\phi_n)|| \leq ||\mu||_\infty ||S(\phi_n)||_p \leq kC_p||\phi_n||.$$

De aquí obtenemos que:

$$||\phi_{n+1}|| \leq (kC_p)^n ||\phi_0||$$

y por la elección de C_p obtenemos que estas normas convergen geométricamente. Por lo tanto, la serie de Neumann:

$$\phi = \nu + \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n$$

converge pues sus sumas parciales forman una sucesión de Cauchy. Más aún,

$$\begin{aligned} \mu S(\phi) &= \mu S(\nu) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu S(\phi_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu S(\phi_n) \\ &= \phi - \nu \end{aligned}$$

y por lo tanto, ϕ es la única solución a la ecuación dada en el espacio L^p. Por la definición de ϕ_n se tiene que su soporte se encuentra contenido en el soporte de

μ y por lo tanto será de soporte compacto. De aquí se deduca que $\sum_{n=0}^{\infty} \mu S(\phi_n)$ es de soporte compacto y por ende ϕ lo es. Ahora, tenemos que encontrar ψ conociendo ϕ, es decir, hay que resolver $\partial\psi = \phi$. Escribamos:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\eta)}{\eta - z} \partial\eta \wedge \partial\overline{\eta}$$

la cual tiene sentido pues $\phi \in L^p$. Finalmente se puede demostrar (pero omitimos los argumentos) que:

- En efecto, ψ así definida es la solución a la ecuación deseada. La idea es mediante un proceso de aproximación: se demuestra para funciones en C_0^∞ con el uso de la fórmula de Pompeiu y luego se aproxima con estas funciones utilizando el hecho que son densas.
- ψ es Holder-continua con exponente $1 - \frac{2}{p}$ y por ende continua.

■

Finalmente, tenemos el siguiente corolario de la demostración:

Corolario 4:

La familia $QC(k, R)$ es compacta con la topología de convergencia uniforme en compactos de $\mathbb{C}$.

Demostración:

Tenemos que

$$\phi = \nu + \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n$$

y al sacar normas se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
||\phi||_p &\leq ||\nu||_p + \sum_{n=0}^{\infty} ||\phi_n||_p \\
&\leq ||\nu||_p + \sum_{n=0}^{\infty} (kC_p)^n ||\phi_0||_p \\
&= ||\nu||_p + \frac{||\phi_0||_p}{1 - kC_p} \\
&\leq ||\nu||_p + \frac{||\mu||_\infty ||\nu||_p}{1 - kC_p} \\
&\leq ||\nu||_p \left(1 + \frac{kC_p}{1 - kC_p}\right) \\
&= \frac{||\nu||_p}{1 - kC_p}
\end{aligned}$$

. Recordemos que en el Lema 2 la constante C depende de k, R y $||\partial f||_p$. La dependencia en $||\partial f||_p$ es que se utiliza que esté acotada superiormente por alguna constante que se sustituye, pero dicha constante en principio varia con f, pero por lo dicho en el Paso 4, tenemos que ∂f satisface la ecuación de Beltrami generalizada con $\nu = \mu$ y por lo tanto por la cuenta anterior hay una cota que funciona para toda $f \in QC(k, R)$ para acotar a $||\partial f||_p$. Por lo tanto, $QC(k, R)$ es equicontinua, pues la constante de Holder será la misma para toda f. Entonces, por Arzela-Ascoli tenemos que $QC(k, R)$ es compacto.

■

8 Paso 6:

Lema 5:

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo, sea $a \in \Omega$ un punto fijo. Supongamos que $u, v : \Omega \to \mathbb{C}$ son continuas, y tienen derivadas parciales localmente integrables que satisfacen $\overline{\partial} u = \partial v$ en Ω. Entonces $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por:

$$f(z) = \int_a^z u(\eta) d\eta + v(\eta) d\overline{\eta}$$

es una función C^1 bien definida con $\partial f = u$ y $\overline{\partial} f = v$.

Demostración:

Si u, v son C^1 entonces la condición $\overline{\partial} u = \partial v$ significa que la $1-$forma $\omega = u(\eta) d\eta + v(\eta) d\overline{(\eta)}$ es cerrada y por ende exacta y por lo tanto el lema se sigue por el Teorema de Green. En el caso general, utilicemos una secuencia suave en L^1 para aproximar u, v, digamos u_n, v_n, donde se cumple que:

$$\overline{\partial} u_n = \partial v_n.$$

Luego por el teorema de convergencia dominada se sigue el lema.

■

Una vez que tenemos este lema podemos hacer lo siguiente: Sea μ de soporte compacto y C^1. Al poner $\mu = \nu$ sabemos que existe una función continua $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ tal que sus parciales estén localmente en L^p y que satisface la ecuación de Beltrami casi en todas partes. Lo anterior por el teorema del paso 5. Si f es un difeomorfismo entonces $u = \partial f$ y $v = \overline{\partial} f$ son funciones continuas, la $1-$forma $u \partial \eta + v \partial \overline{\eta}$ es cerrada y por lo tanto, $\overline{\partial} u = \partial v$. De aquí obtenemos que u satisface la ecuación:

$$\overline{\partial} u = \mu \partial u + \mu_z u$$

donde μ_z es continua y de soporte compacto. Más aún tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &\neq J(f) \\ &= |\partial f|^2 - |\overline{\partial} f|^2 \\ &= (1 - |\mu|^2)|u|^2 \end{aligned}$$

por lo que u nunca se anula. Por lo tanto, existe σ continua tal que $u = e^\sigma$. Sustituyendo esto en la ecuación que sabemos μ cumple obtenemos:

$$\overline{\partial} e^\sigma = \mu \partial e^\sigma + \mu_z e^\sigma$$

y al cancelar e^σ, obtenemos:

$$\overline{\partial}\sigma = \mu\partial\sigma + \mu_z.$$

Notemos que todos estos pasos son invertibles siempre que comencemos con una función μ_z continua y de soporte compacto. Pongamos $\nu = \mu_z$ y entonces el teorema del paso 5 son asegura la existencia de una función continua σ que satisface la ecuación de Beltrami Generalizada. Luego, poniendo $u = e^\sigma, v = \mu e^\sigma$ obtendremos mediante el Lema 5 un mapa $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ con $J(f)(z) \neq 0$. Por ende, localmente, f es un difeomorfismo y como $\overline{\mathbb{C}}$ es simplemente conexo f es un difeomorfismo global.

9 Paso 7:

Finalmente terminaremos la demostración de la primera parte de Ahlfors-Bers. Sólo aplicaremos todo lo demostrado en pasos anteriores de manera adecuada y obtendremos el resultado:

Sea $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ con $k = ||\mu||_\infty < 1$ con soporte compacto, y por el Paso 1 podemos suponer que su soporte está en el disco $D(0, R)$. Por la proposición mencionada en los preliminares existe una sucesión $\mu_n \in L^\infty(\mathbb{C})$tal que:

- $||\mu_n - \mu||_\infty$ y μ_n es C^1,
- El soporte de μ_n se está contenido en el disco $D(0, R)$.

Gracias al paso 6 sabemos que existe una función f_n que es solución a la ecuación de Beltrami cuando utilizamos μ_n. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $f_n \in QC(k', R)$ para algún k'. Por la proposición 2 tenemos que $f_n^{-1} \in QC(k', 4R)$. Luego, por el corolario 4 estos conjuntos son compactos y por ende, al pasar a subsucesiones de ser necesario, podemos suponer que f_n converge a alguna función $f \in QC(k', R)$. Recordemos que la topología es la de convergencia en compactos y por ende $\partial f_n, \overline{\partial} f_n$ convergen a $\partial f, \overline{\partial} f$, respectivamente, y por ser subsucesión se tiene que:

$$\begin{aligned}\mu &= \lim_{n\to\infty} \mu_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f_n}{\overline{\partial} f_n} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} \overline{\partial} f}{\lim_{n\to\infty} \partial f} \\ &= \frac{\overline{\partial} f}{\partial f}\end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$\partial f = \mu \overline{\partial} f,$$

resolviendo la ecuación como queríamos. Notemos que f es un homemorfismo cuasiconforme pues tiene una inversa continua y esto termina la prueba de la primera parte del teorema de Ahlfors-Bers.

10 Bibliografía

- Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics, Edson de Faria, Wellington de Melo
- Lectures on Quasiconformal Mappings, Lars V. Ahlfors
- Linear Integral Equations, Rainer Kress