Cirugía Cuasiconforme

Emilio Salcedo Martínez

23 de mayo de 2012

Resumen

La cirugía cuasiconforme es una manera de construir nuevos mapeos racionales con ciertas propiedades dinámicas a partir de mapeos analíticos ya existentes. Para hacer esto, primero se construye una función que no es analítica, pero sí es cuasiregular. Luego invocamos el teorema del mapeo de Riemann medible para recuperar la analiticidad.

La idea intuitiva detrás de la cirugía cuasiconforme es la de "pegar" distintos tipos de sistemas dinámicos holomorfos para producir un sistema dinámico no holomorfo, pero con un diferencial de Beltrami invariante que se rectifica usando el teorema del mapeo de Riemann medible.

1. Definiciones

Recordemos que una métrica en un dominio del plano complejo se definió como una función que asocia a cada z en el domino un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_z$ con ciertas propiedades de suavidad. Pero de álgebra lineal sabemos que existe una correspondencia biyectiva entre las formas bilineales no degeneradas definidas positivas (productos internos) y formas cuadráticas $q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ tales que $b^2 - ac < 0$ y a, $c > 0$. Esto se demostrará en el apéndice.

Entonces, una métrica Riemanniana puede escribirse (convenientemente) en coordenadas locales como

$$ds^2 = a(z)dx^2 + 2b(z)dxdy + c(z)dy^2, \text{ [1]}$$

donde $a(z), c(z) > 0$ y $b(z)^2 - a(z)c(z) < 0$ para cada z. Utilizando la notación compleja $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$, tenemos

$$\begin{aligned}
ds^2 &= a(z)\left(\frac{dz + d\bar{z}}{2}\right)^2 + 2b(z)\left(\frac{dz + d\bar{z}}{2}\right)\left(\frac{dz - d\bar{z}}{2i}\right) + c(z)\left(\frac{dz - d\bar{z}}{2i}\right)^2 \\
&= \frac{a(z)}{4}\left(dz^2 + 2dzd\bar{z} + d\bar{z}^2\right) - \frac{2b(z)i}{4}\left(dz^2 - d\bar{z}^2\right) - \frac{c(z)}{4}\left(dz^2 - 2dzd\bar{z} + d\bar{z}^2\right) \\
&= \frac{1}{4}(a(z) - c(z) - 2b(z)i)dz^2 + 2\frac{a(z) + c(z)}{4}dzd\bar{z} + \frac{1}{4}(a(z) - c(z) + 2b(z)i)d\bar{z}^2 \\
&= \bar{\alpha}(z)dz^2 + 2\rho(z)dzd\bar{z} + \alpha(z)d\bar{z}^2
\end{aligned}$$

Donde $\alpha = \frac{1}{4}(a - c + 2bi)$ y $\rho = \frac{a+c}{4} > 0$. Notemos que

$$|\alpha|^2 = \frac{(a-c)^2 + 4b^2}{4^2} < \frac{a^2 - 2ac + c^2 + 4ac}{4^2} = \rho^2$$

.

Sea $\mu = \frac{\alpha}{\rho}$, entonces $|\mu(z)| < 1$ y ds^2 puede ser expresada como

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \rho(z)\bar{\mu}(z)dz^2 + 2\rho(z)dzd\bar{z} + \rho(z)\mu(z)d\bar{z}^2 \\
&= \rho(z)|dz + \mu(z)d\bar{z}|^2.
\end{aligned}$$

[1] A esta expresión se le conoce como primera forma fundamental y se utiliza para calcular longitudes de curvas.

Notemos aquí que μ es holomorfa. Esto motiva las siguientes definiciones.

Definición 1.1. Dos métricas ds_1^2, ds_2^2 se dicen *conformemente equivalentes* si existe una función positiva $\tau(z)$ tal que $ds_2^2 = \tau ds_1^2$. Es claro que esto es una relación de equivalencia.

A una clase de equivalencia se le llama *estructura conforme*.

De hecho podemos relajar las hipótesis, es decir, suponer que los coeficientes de Beltrami μ son medibles y las relaciones entre las métricas se satisfacen ctp. con la medida de Lebesgue. A una clase de equivalencia con estas propiedades se le dice *estructura conforme medible*.

A una estructura conforme medible se le dice *acotada* si $\|\mu\|_\infty < 1$.

La estructura conforme *estándar* será $\sigma_0 = [ds^2_{\hat{\mathbb{C}}}]$, donde $ds^2_{\hat{\mathbb{C}}} = (\frac{2|dz|}{1+|z|^2})^2 \sim |dz|^2 = dx^2 + dy^2$, es decir, $\mu \equiv 0$.

De las definiciones y la discusión anterior es claro que las estructuras complejas medibles están en correspondencia biyectiva con los diferenciales de Beltrami. Cuando es vista en la estructura conforme estándar, la ecuación $ds^2 = constante$ define elipses en el espacio tangente. Por esto, una estructura conforme también es referida como *campo de elipses*. Los ejes menor y mayor forman ángulos $\frac{1}{2}\arg(z)$ y $\frac{1}{2}\arg(z) + \frac{\pi}{2}$ respectivamente.

Definición 1.2. Sea $w = h(z)$ un difeomorfismo local y $ds^2 = |dw + \mu(w)d\bar{w}|$ una métrica, el *pull-back* de ds^2 por h se define como

$$h^*(ds^2) \quad = \quad |h_z(z)dz + h_{\bar{z}}(z)d\bar{z} + \mu(h(z))\overline{(h_z(z)dz + h_{\bar{z}}(z)d\bar{z})}|^2$$

donde h_z y $h_{\bar{z}}$ denotan las derivadas parciales con respecto a z y $\bar{z}$ respectivamente.

De esta definición se desprenden varias observaciones.

Observación 1. La definición también tiene sentido para los mapeos cuasiconformes por la siguiente proposición.

Proposición 1.3. *Los mapeos cuasiconformes son diferenciables ctp.*

Demostración. Véase [1], pp. 16 - 22. □

En realidad, esta proposición es un corolario de otro teorema. En el apéndice se establece el enunciado de dicho teorema y se da un bosquejo de su demostración.

Observación 2. De lo anterior se tiene que podemos hablar de pull-back de una estructura conforme medible. Más aún, coincidirá con el pull-back de su diferencial de Beltrami asociado, esto porque

$$\begin{aligned} h^*(ds^2) &= |h_z(z)dz + h_{\bar{z}}(z)d\bar{z} + \mu(h(z))\overline{(h_z(z)dz + h_{\bar{z}}(z)d\bar{z})}|^2 \\ &= |(h_z(z) + \mu(h(z))\overline{h_{\bar{z}}(z)})dz + (h_{\bar{z}}(z) + \mu(h(z))\overline{h_z(z)})d\bar{z}|^2 \\ &= |h_z(z) + \mu(h(z))\overline{h_{\bar{z}}(z)}|^2 |dz + \frac{h_{\bar{z}}(z) + \mu(h(z))\overline{h_z(z)}}{h_z(z) + \mu(h(z))\overline{h_{\bar{z}}(z)}} d\bar{z}|^2 \\ &\sim |dz + h^*(\mu)d\bar{z}|^2. \end{aligned}$$

Así que de ahora en adelante consideraremos el pull-back de estructuras conformes medibles.

Observación 3. Si en particular $ds_0^2 = ds^2_{\hat{\mathbb{C}}}$ $(\mu \equiv 0)$, tenemos

$$h^*(ds^2) = |h_z(z)dz + h_{\bar{z}}(z)d\bar{z}|^2 = |h_z(z)|^2|dz + \mu_h(z)d\bar{z}|^2 \sim |dz + \mu_h(z)d\bar{z}|^2,$$

donde $\mu_h(z) = h_{\bar{z}}(z)/h_z(z)$ es el coeficiente de Beltrami de h. Entonces $h^*(\sigma_0)$ corresponde al coeficiente de Beltrami $\mu_h \frac{d\bar{z}}{dz}$.

De aquí que $\sigma_0 = h^*(\sigma_0)$ si y sólo si h es conforme.

Observación 4. Se puede ver que el pull-back es un “funtor contravariante” en el sentido de que $(g \circ h)^*(\sigma) = h^*(g^*(\sigma))$.

Observación 5. De todo lo anterior, si dos mapeos q.c., g y h, definen la misma estructura conforme, es decir $h^*(\sigma_0) = g^*(\sigma_0)$, entonces $g \circ h^{-1}$ preserva la estructura conforme estándar, $(g \circ h^{-1})^*(\sigma_0) = \sigma_0$; luego es conforme.

Observación 6. Con estas definiciones, el teorema de Ahlfors-Bers, o teorema del mapeo de Riemann medible, se puede reformular de la siguiente manera.

Teorema 1.4 (Teorema de mapeo de Riemann Medible o de Ahlfors-Bers). *Para cualquier estructura medible conforme acotada σ en $\widehat{\mathbb{C}}$, existe un mapeo cuasiconforme $h : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $h^*(\sigma_0) = \sigma$. Más aún, h es único si es normalizado de tal manera que fija 0, 1 e ∞.*

2. Lema fundamental de la cirugía cuasiconforme

Pasamos ahora al lema principal, que se conoce como el *lema fundamental de la cirugía cuasiconforme*. Damos la versión y la prueba que se encuentran en [3]. Para enunciarlo, necesitamos antes una definición.

Definición 2.1. Un *mapeo (anti) cuasi-regular (q.r.)* es una composición de un homeomorfismo cuasiconforme y una función (anti) holomorfa.

Lema 2.2 (Lema fundamental de la cirugía cuasiconforme). *Sea $g : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ un mapeo q.r. Supongamos que existen conjuntos disjuntos E_i de $\widehat{\mathbb{C}}$, mapeos q.c. $\Phi_i : E_i \to E_i'$ $i = 1, \ldots, m$ y un entero $N \geq 0$, que satisfacen las siguientes condiciones*

1. *$g(E) \subset E$, donde $E = \bigcup_i^m E_i$;*
2. *$\Phi \circ g \circ \Phi_i^{-1}$ es analítico en $E_i' = \Phi_i(E_i)$, donde $\Phi : E \to \widehat{\mathbb{C}}$ está definido por $\Phi|_{E_i} = \Phi_i$;*
3. *$g_{\bar{z}} = 0$ ctp. en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus g^{-N}(E)$.*

Entonces existe un mapeo q.c. φ de $\widehat{\mathbb{C}}$ tal que $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ es una función racional. Más aún, $\varphi \circ \Phi_i^{-1}$ es conforme en E_i' y $\varphi_{\bar{z}} = 0$ ctp. en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{n \geq 0} g^{-n}(E)$.

Demostración. Definamos una estructura conforme σ en $\widehat{\mathbb{C}}$ como sigue. Sea σ_0 la estructura conforme estándar definida por $ds^2 = |dz|^2$. Sea $\sigma = \Phi^*(\sigma_0)$ en E definido excepto un conjunto de medida cero. Por la condición 2, $\Phi \circ g = h \circ \Phi$ donde h es holomorfa, y las funciones holomorfas preservan la métrica estándar, entonces $(\Phi \circ g)^*(\sigma_0) = (h \circ \Phi)^*(\sigma_0)$ que equivale a $g^*(\Phi^*(\sigma_0)) = \Phi^*(h^*(\sigma_0)) = \Phi^*(\sigma_0)$, en otras palabras, $\sigma|_E$ es g-invariante en el sentido de que $g^*(\sigma) = \sigma$ ctp. en E. Haciendo el pull-back de σ bajo g, inductivamente definimos σ en $\bigcup_{n \geq 0} g^{-n}(E)$. Finalmente hacemos $\sigma = \sigma_0$ en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{n \geq 0} g^{-n}(E)$. En resumen, definimos σ como

$$\sigma = \begin{cases} (g^*)^n(\Phi^*(\sigma_0)) = \Phi^*(\sigma_0) & \text{en } g^{-n}(E) \\ \sigma_0 & \text{en } \widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{n \geq 0} g^{-n}(E) \end{cases}.$$

Por la condición 3, g es analítica ctp. en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus g^{-N}(E) \supset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{n \geq 0} g^{-n}(E)$, luego σ es g-invariante ctp. Por todo esto, σ se puede escribir como

$$\sigma = \begin{cases} (g^*)^N(\Phi^*(\sigma_0)) = (\Phi \circ g^N)^*(\sigma_0) & \text{en } g^{-N}(E) \\ \sigma_0 & \text{en } \widehat{\mathbb{C}} \setminus g^{-N}(E) \end{cases}.$$

Ahora, si Φ es K_1-q.c. y g es K_2-q.r. y si a σ la representamos como $|dz + \mu d\bar{z}|^2$, entonces $\|\mu\|_\infty \leq k = \frac{K-1}{K+1}$ ctp. donde $K = K_1 K_2^N$, pues μ es el coeficiente de Beltrami de $\Phi \circ g^N$. Por el teorema del mapeo de Riemann medible, existe un mapeo K-q.c φ de $\widehat{\mathbb{C}}$ tal que $\varphi^*(\sigma_0) = \sigma$ ctp. Entonces $f = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ mantiene invariante la estructura conforme estándar σ_0. Luego f es localmente 1-q.c., es decir, conforme salvo un número conjunto de medida cero, pero si el conjunto fuera infinito, como $\widehat{\mathbb{C}}$ es compacto habría un subconjunto de singularidades que se estaría acumulando y eso no puede pasar, así que hay un número finito de puntos críticos. Removiendo estas singularidades, f es analítica en $\mathbb{C}$, luego, es una función racional. $\square$

Continuamos con un teorema que relaciona la existencia de discos de Siegel con anillos de Herman.

Teorema 2.3. *Sea $0 < \theta < 1$ un número irracional, y supongamos que existe un mapeo racional de grado d que tiene un disco de Siegel tal que f es conjugado a la rotación $R_\theta : z \mapsto e^{2\pi i\theta} z$. Entonces existe un mapeo racional de grado $2d$ que tiene un anillo de Herman con el mismo número de rotación.*

Demostración. Sea V_f el disco de Siegel de f. Podemos asumir que $0 \in V_f$ y que $f(0) = 0$, pues podemos componer con una transformación lineal que mantiene el grado y después hacer una traslación. Sea $g \in \mathrm{Rat}_d(\widehat{\mathbb{C}})$ el mapeo racional $g = c \circ f \circ c^{-1}$ donde $c(z) = \bar{z}$ (obviamente $c = c^{-1}$). Entonces g también tiene un disco de Siegel $V_g = c(V_f) \ni 0$, con $g(0) = 0$, y $g|_{V_g}$ es conjugado a $R_{-\theta} : z \mapsto e^{-2\pi i\theta} z$.

Sea $h_f : V_f \to \mathbb{D}$ una conjugación conforme entre $f|_{V_f}$ y $R_\theta|_{\mathbb{D}}$. Del mismo modo, se $h_g : V_g \to \mathbb{D}$ una conjugación conforme entre $g|_{V_g}$ y $R_{-\theta}|_{\mathbb{D}}$; de hecho, podemos tomar $h_g = h_f \circ c^{-1}$.

Fijemos $0 < r < 1$, y sea $C_r = \{z : |z| = r\} \subset \mathbb{D}$. Tomemos una región anular A alrededor de C_r, tal que $\bar{A} \subset \mathbb{D}$, que sea simétrica bajo la inversión alrededor de C_r, en otras palabras, $\psi(A) = A$, donde $\psi(z) = r^2/z$. Notemos que $\psi(C_r) = C_r$ y que ψ satisface

$$\psi \circ R_\theta(z) = \frac{r^2}{e^{2\pi i\theta} z} = R_{-\theta} \circ \psi(z). \tag{1}$$

Ahora, consideremos la región anular topológica $A_f = h_f^{-1}(A) \subset V_f$ y $A_g = h_g^{-1}(A) \subset V_g$. Tenemos el mapeo conforme

$$\phi = h_g^{-1} \circ \psi \circ h_f : A_f \to A_g. \tag{2}$$

Este mapeo conjuga $f|_{A_f}$ con $g|_{A_g}$. Las curvas invariante $\gamma_f = h_f^{-1}(C_r)$ y $\gamma_g = h_g^{-1}(C_r)$ se corresponden uno a otro vía esta conjugación, es decir, $\phi(\gamma_f) = \gamma_g$. Más aún, si $D_f \subset V_f$ y $D_g \subset V_g$ son los discos topológicos acotados por γ_f y γ_g respectivamente, entonces ϕ envía $A_f \cap D_f$ a $A_g \cap (\widehat{\mathbb{C}} \setminus D_g)$ y $A_f \cap (\widehat{\mathbb{C}} \setminus D_f)$ a $A_g \cap D_g$.

Ahora, sea $B_f \subset \overline{B_f} \subset A_f$ otro anillo topológico que sea invariante bajo f y contenga γ_f, y sea $B_g = \phi(B_f)$. Definimos un homeomorfismo q.c. $\Phi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ que extienda $\phi|_{B_f}$ haciendo que Φ sea conforme en cada componente de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A_f$ sobre la correspondiente componente $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A_g$, usando el teorema del mapeo de Riemann, e interpolando por difeomorfismos cuasiconformes en cada componente anular de $A_f \setminus B_f$.

Sea $G : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ el mapa definido por

$$G(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus D_f \\ \Phi^{-1} \circ g \circ \Phi(z) & \text{si } z \in D_f. \end{cases}$$

De las ecuaciones 1, 2 y las definciones de h_f y h_g obtenemos

$$f(z) = \phi^{-1} \circ g \circ \phi(z) = \Phi \circ g \circ \Phi(z)$$

para cada $z \in B_f \supset \partial D_f (= \gamma_f)$, se sigue que G es una cubierta ramificada de la esfera de Riemann y de hecho, es un mapeo q.r. Este mapeo G tiene dos veces más puntos de ramificación que f, pues por cada punto de ramificación que tiene en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus V_f$, hay un correspondiente punto de ramificación en $D_f \cap (\widehat{\mathbb{C}} \setminus A_f)$ que proviene de g, con la misma multiplicidad. Entonces el grado topológico de G es igual a $2d$.

El paso siguiente es deformar cuasiconformemente a G en un mapeo racional. Para esto usamos el lema fundamental de la cirugía cuasiconforme. Las hipótesis se satisfacen si tomamos $E = A_f$, $\Phi = \Phi^{-1}$ y $N = 1$. Sea $H : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ el homeomorfismo q.c. del lema. Entonces $F = H \circ G \circ H^{-1}$ es un mapeo racional, con el mismo grado que G.

Finalmente, hacemos $W = H(A_f)$. Este es un anillo topológico con $F(W) = W$, así que W está contenido en alguna componente de U del conjunto de Fatou de F. Como $F|_W$ es claramente conjugado a la rotación R_θ, entonces U disco de Siegel o un anillo de Herman para F. En particular, $F|_U$ es inyectiva. Si U fuera un disco de Siegel, contendría una de las dos componentes de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus W$; pero esto es imposible pues ambas componentes contienen puntos críticos de F. Entonces U es un anillo de Herman, con número de rotación θ, y el teorema queda probado. □

Como último comentario, la técnica de cirugía cuasiconforme es una herramienta para probar el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *Si f es una función racional de grado d, entonces*

$$n_A + n_P + n_I + 2n_H \leq 2d - 2,$$

donde n_A es el número de ciclos atractores, n_P es el número de ciclos de dominios parabólicos, n_I es el número de ciclos de puntos periódicos indiferentes irracionalmente, y n_H es el número de ciclos de anillos de Herman.

A. Apéndice

Proposición A.1. *Una forma bilineal simétrica B es un producto interno si y sólo si su forma cuadrática asociada $q(x) = B(x,x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$, donde $x = (x_1, x_2)$, cumple $a, c > 0$ y $b^2 - ac < 0$.*

Demostración. Si B es no degenerada y definida positiva, entonces $q(1,0) = a > 0$, $q(0,1) = c > 0$. Escribamos q como

$$q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = a(x_1 + \frac{b}{a}x_2)^2 - \frac{b^2 - ac}{a^2}x_2^2. \tag{3}$$

Evaluando q en $x = (-\frac{b}{a}, 1) \neq 0$ vemos que $0 < q(x) = -\frac{b^2-ac}{a^2}$.

Ahora, si q cumple con las propiedades de la proposición, la podemos expresar como en la ecuación 3. Es claro que B es no degenerada y definida positiva. □

Definición A.2. Se dice que $u(x,y)$ es absolutamente continua en líneas (ACL) en un dominio si para cada rectángulo cerrado en el dominio con lados paralelos a los ejes, la función es absolutamente continua ctp. en las líneas horizontales y verticales a los ejes.

Teorema A.3. *Un mapeo es K-cuasiconforme si y sólo si es ACL y $\phi_{\bar{z}} \leq k|\phi_z|$ ctp. donde $k = \frac{K-1}{K+1}$.*

Observación 7. La desigualdad del teorema es equivalente a "controlar" la excentricidad del campo de elipses.

De análisis sabemos que las funciones ACL tienen derivadas parciales ctp. De ahí el corolario que nos interesa.

Corolario A.4. *Los mapeos cuasiconformes son diferenciables ctp.*

Bosquejo de la demostración del teorema. Se prueba un lema que, por sí sólo, es un resultado impresionante debido a Gehring y Lehto, y de hecho, es la parte más larga del teorema.

Lema A.5. *Si ϕ es continuo en el sentido topológico y tiene derivadas parciales ctp., entonces es diferenciable ctp.*

Enseguida se prueban otros dos lemas.

Lema A.6. *Si ϕ tiene derivadas distribucionales localmente integrables, entonces ϕ es ACL.*

Lema A.7. *Si ω es un mapeo topológico C^2 y ϕ tiene derivadas distribucionales localmente integrables, entoces también $\phi \circ \omega$, y están dadas por*

$$(\phi \circ \omega)_x = (\phi_\xi \circ \omega)\frac{\partial \xi}{\partial x} + (\phi_\eta \circ \omega)\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$(\phi \circ \omega)_y = (\phi_\xi \circ \omega)\frac{\partial \xi}{\partial y} + (\phi_\eta \circ \omega)\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Con estas herramientas, se prueba de que una función ACL que cumple la desigualdad del teorema debe ser K-cuasiconforme y la técnica es igual al caso diferenciable.

Para el regreso, se prueba que si ϕ es q.c. en el sentido geométrico, entonces es ACL. Por último se prueba la desigualdad. □

De este teorema de desprenden algunos corolarios que vale la pena recalcar.

Corolario A.8. *Si el mapeo topológico ϕ satisface $\phi_{\bar{z}} = 0$ ctp., y si ϕ es ACL o tiene derivadas distribucionales integrables, entonces ϕ es conforme.*

Corolario A.9. *Si ϕ es q.c. y $\phi_{\bar{z}} = 0$ ctp., entonces ϕ es conforme.*

Corolario A.10. *Si ϕ es q.c., $\phi_z \neq 0$ ctp.*

Observación 8. Para verificar si un homeomorfismo dado es q.c. no es suficiente checar que tenga derivadas parciales ctp. y controlar la excentricidad del correspondiente campo de elipses. También es necesario revisar la condición ACL. De hecho, es absolutamente necesaria. Por ejemplo, si consideramos la función de Cantor o función de la escalera del Diablo, vimos en la primer tarea del curso que se extendía a una homeomorfismo que tenía derivadas ctp. Pero al no ser absolutamente continua en líneas no puede ser cuasiconforme. Otra manera de ver esto es por el corolario A.9. Probamos que la función cumplía con la segunda hipótesis de ese corolario pero no era conforme, así que no puede ser cuasiconforme.

Referencias

[1] Ahlfors, Lars V. *Lectures on Quasiconformal Mappings.* University Lectures Series, Vol. 38 (2nd ed.) Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. July 14, 2006.

[2] Edson de Faria and Wellington de Mello *Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics.* Cambridge University Press; 1 edition. November 10, 2008.

[3] Shishikura, Mitsuhiro. "On The Quasiconformal Surgery of Rational Functions". *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 4e Série.* Tome 20, No. 1, (1987). p. 1–29.