# APLICACIONES DEL TEOREMA DE AHLFORS-BERS, DOMINIOS ERRANTES.

PABLO PÉREZ LUCAS

RESUMEN. La mayoría de las veces cuando se habla de aplicaciones de la Matemática se piensa en aplicaciones a la Economía, Ecología, Biología, etc. Sin embargo, los resultados que se presentan en estas notas, dan muestra de un ejemplo de aplicación de la Matemática a la Matemática misma.

## 1. TEOREMA DE AHLFORS-BERS.

**Teorema 1.** *Sea U un dominio en la esfera de Riemann.*

1. *Dada una función medible $\mu : U \to \mathbb{D}$ tal que $\| \mu \|_\infty < 1$ entonces existe un homeomorfismo cuasiconforme $f : U \to V$ que es una solución de la ecuación de Beltrami*
$$\bar{\partial} f = \mu \partial f.$$
*Dos soluciones difieren por una post-composición con difeomorfismo holomorfo. En particular, si U es la esfera de Riemann total entonces existe un único homeomorfismo solución que fija tres puntos dados.*
2. *Sea $\Lambda$ un subconjunto abierto de un espacio de Banach complejo y considere una función $g : \Lambda \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, $g(\lambda, z) = \mu_\lambda(z)$, que satisface las siguientes propiedades.*
   a) *Para cada $\lambda$ la función $h : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ que $h(z) = \mu_\lambda(z)$ es medible y $\| \mu_\lambda \|_\infty \leq k$ para algún $k < 1$ fijo.*
   b) *Para casi todo $z$, la función $s : \Lambda \to \mathbb{D}$ dada por $s(\lambda) = \mu_\lambda(z)$ es holomorfa.*

   *Para cada $\lambda$, considérese la función $f_\lambda$ como el único homeomorfismo de la esfera de Riemann que fija $0, 1, \infty$ y cuyo coeficiente de Beltrami es $\mu_\lambda$. entonces la función $\lambda \mapsto f_\lambda(z)$ es holomorfa para todo $z$.*

## 2. ALGUNAS APLICACIONES DEL TEOREMA DE AHLFORS-BERS.

**Teorema 2.** *En el espacio de funciones racionales de grado d o polinomios de grado d, cada clase de conjugación cuasiconforme de funciones es conexa.*

*Demostración.* Sean $f$ y $g$ dos funciones racionales cuasiconformemente conjugadas, es decir, existe una función $h$ cuasiconforme en $\hat{\mathbb{C}}$ que fija $0, 1, \infty$, tal que $g = h \circ f \circ h^{-1}$. Consideramos $\mu$ el coeficiente de Beltrami para $h$, dicho coeficiente es invariante bajo la dinámica de $f$, en el sentido que el correspondiente campo de elipses es preservado por la derivada de $f$ Lebesgue-casi en todo punto, esto es debido a que $f$ y $f'$ son funciónes racionales, si la derivada provocara distorsión, esta tendría que ser $k$-cuasiconforme para $k > 1$ lo cual no puede ser. Si $w$ es un número complejo en el disco unitario cerrado entonces el coeficiente de Beltrami $w\mu$ también es invariante bajo la dinámica de $f$. Sea $h_w$ el único homeomorfismo

*Date*: 14 de mayo de 2012.

cuasiconforme en $\hat{\mathbb{C}}$ con coeficiente de Beltrami $w\mu$ que coincide con $h$ en los tres puntos $1, 0, \infty$. Por el teorema de Ahlfors-Bers, se tiene una familia de homeomorfismos continuos que conectan $h_1 = h$ con $h_0$, notemos que $h_0$ es una transformación de Möbius, dado que $\mu_0(z) = 0$ lo cual implica que $\bar{\partial}h_0(z) = 0$, es decir, $h_0 : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ es holomorfa y conforme, por lo que $h_0 \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$. Ahora, la función $g_w = h_w \circ f \circ h_w^{-1}$ es localmente $k \cdot \frac{1}{k} = 1$-cuasiconforme y por lo tanto, una función conforme. Así $g_w$ con $w \in [0, 1]$, es una trayectoria de funciones racionales que conecta a $g$ con la función racional $h_0 \circ f \circ h_0^{-1}$. Luego, si tomamos la trayectoria de transformaciones de Möbius $H_t(z) = (1 - t)h_0 + tz$ con $t \in [0, 1]$ la cual conecta $h_0$ con la identidad obtenemos una trayectoria de funciones racionales dada por $H_t^{-1} \circ f \circ H_t$ que conectan $h_0 \circ f \circ h_0^{-1}$ con $f$, de esta forma obtenemos una trayectoria de funciones racionales que conectan $g$ con $f$ lo cual demuestra el teorema.. □

Otra aplicación simple del teorema de Alfors-Bers es la prueba de Sullivan sobre la finitud del número de ciclos periódicos de componentes de Fatou.

*Nota* 1. Recordemos que el espacio de funciones racionales de grado $d$ ($\text{Rat}_d(\hat{\mathbb{C}})$) puede ser identificado con un subconjunto abierto del espacio proyectivo ($\mathbb{C}P^{2d+1}$) de dimensión $2d + 1$.

**Teorema 3.** *Si $f$ es una función racional de grado $d$ entonces el número de anillos de Herman de $f$ es a lo más $2d - 1$.*

*Demostración.* Sea $N$ el número de órbitas de anillos de Herman de $f$, y supongamos que $N > 2d - 1$. Queremos construir una familia $\{f_w\}$ de funciones racionales, para $w$ en una vecindad de 0 en $\mathbb{C}^N$, tal que $f_w \neq f_{w'}$ si $w \neq w'$, lo cual no es posible porque $N$ es mayor que la dimensión del espacio de funciones racionales. Para construir esta familia de funciones comenzamos por contruir una familia $\{\mu_i\}, \quad i = 1, \ldots, N$, de coeficientes de Beltrami cada uno con soporte en la orbita grande de un anillo de Herman e invariante bajo $f$. Para construir cada coeficiente de Beltrami consideramos un anillo de Herman de periodo $k$. Entonces por definición la restricción de $f^k$ en estos anillos es analiticamente conjugada a una rotación irracional de un anillo en si mismo. Considerando un coeficiente de Beltrami distinto de cero e invarinate bajo tal rotación y tomando el pull-back por la conjugación, obtenemos un coeficiente de Beltrami con la misma norma $L^\infty$ en toda la órbita grande de este anillo de Herman. Ahora consideramos la familia holomorfa $\mu_w$ de coeficientes de Beltrami, los cuales se definen igual a cero en el complemento de las órbitas grandes de todos los anillos de Herman e igual a $\Sigma w_i \mu_i$ en otro caso, donde los $w_i$ son números complejos con $| w_i |< 1$. Sea $h_w$ la familia holomorfa de homeomorfismos cuasiconformes con coeficientes de Beltrami $\mu_w$ dados por el teorema de Ahlfors-Bers. Como cada $\mu_w$ es invariante bajo $f$ como coeficiente de Beltrami, se sigue que $f_w = h_w \circ f \circ h_w^{-1}$ es una familia normal de funciones racionales. Esta es una familia inyectiva de funciones racionales de grado $d$ localmente holomorfas, lo cual no es posible dado que $N$ es mayor que la dimesión del espacio de funciones racionales de grado $d$. □

## 3. Teorema sobre la no existencia de dominios errantes.

En esta sección pondremos nuestra atención a un teorema muy importante en la dinámica compleja. Historicamente, la primera aplicación del teorema de la función medible de Riemann en la dinámica de funciones racionales fue el teorema de Sullivan sobre la no existencia de dominios errantes. En seguida se enuncia este teorema y seguiremos el enfoque extremadamente elegante de McMullen [McM4], el cual está basado en el estudio de deformaciones infinitesimales de una función racional. Este enfoque es bastante natural y evita ciertas complicaciones técnicas concernientes al comportamiento en la frontera de funciones conformes, lo cual obliga a Sullivan a usar la teoría de Carathéodory sobre finales principales ver [5]. Para ver un enfoque ligeramente diferente sobre el teorema de Sullivan usando diferenciales armónicos de Beltrami, ver [6] o [7].

**Teorema 4.** *(**Sullivan**) Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ una función racional. Entonces cada componente conexa del conjunto de Fatou de $f$ es eventualmente periódica.*

Recordemos que una componente conexa del conjunto de Fatou de $f$ es un *dominio errante* si sus imagenes hacia adelante $f^n(U)$, $n \geq 0$ son disjuntas dos a dos. En otras palabras el teorema de Sullivan equivale a decir que $f$ no tiene dominios errantes, de quí el nombre. Antes de seguir con la prueba de este teorema, es recomendable demostrar algunos resultados, como el siguiente debido a I.N. Baker.

**Lema 1.** *Si $f$ tiene un dominio errante entonces este tiene que ser simplemente conexo.*

*Demostración.* Sea $U$ un dominio errante de $f$, y consideremos sus imágenes hacia adelante $U_n = f^n(U)$, $n \geq 0$. Dado que estas imágenes son disjuntas dos a dos y $f$ tiene un numero finito de puntos criticos, podemos asumir (descartando los primeros $U_n$ si es necesario) que $U_n$ no contiene un punto crítico de $f$. Así, cada $f : U_n \to U_{n+1}$ es una función cubriente, y una isometria local si dotamos cada $U_n$ con la métrica hiperbólica. Supongamos que $U = U_0$ no es simplemente conexo. Note que $U_n$ no puede ser el disco agujerado, porque el conjunto de Julia de $f$ es perfecto. Para cada $n$ podemos encontrar una geodésicas cerrada con la métrica hiperbólica de $U_n$, digamos $\gamma_n \subset U_n$ tal que $f(\gamma_n) = \gamma_{n+1}$. Como $f$ es una isometría local en cada $U_n$, la longitud hiperbólica de $\gamma_{n+1}$ en $U_{n+1}$ es igual a la longitud hiperbólica de $\gamma_n$ en $U_n$. Afirmamos que $\mathrm{diam}_{\hat{\mathbb{C}}}(\gamma_n) \to 0$ en la métrica esférica cuando $n \to \infty$. Esto se sigue del hecho de que el diametro esférico del disco mas grande contenido en $U_n$ se tiene que ir a cero cuando $n \to \infty$, porque los $U_n$ son disjuntos dos a dos, y de una comparación simple de la métrica esférica con la métrica hiperbólica en cada $U_n$. Ahora, $f$ es una función Lipschitz en la métrica esférica. Esto significa que para todo $n$ suficientemente grande las componentes pequeñas de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma_n$ (donde pequeño significa tener un diametro esférico comparable con el diametro esférico de $\gamma_n$) son mandadas sobre componentes pequeñas de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma_{n+1}$. Entonces las iteradas de $f$ restringuidas dichas componentes pequeñas forman una familia normal. Lo cual es imposible, porque cada componente de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma_n$ está en el conjunto de Julia de $f$. Esta contradicción muestra que $U$ is simplemente conexo como se quería. □

Con el fin de descartar la existencia de discos errantes para $f$, examinaremos las deformaciones infinitesimales de $f$.

Un *campo vectorial* sobre $f$ es una función $w : \hat{\mathbb{C}} \to T\hat{\mathbb{C}}$ tal que $\pi \circ w = f$, donde $\pi : T\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ es la proyección canónica sobre la base del haz tangente de la esfera. Decimos que un campo vectorial continuo $v : \hat{\mathbb{C}} \to T\hat{\mathbb{C}}$ es una *deformación* de $f$ si $\delta v = f'v - v \circ f$ es un campo vectorial holomorfo sobre $f$. Como

$$\bar{\partial}(\delta v) = f'\bar{\partial}v - \bar{\partial}v \circ f \bar{f}'$$

se tiene que $v$ es una deformación de $f$ si y sólo si la diferencial de Beltrami $\mu = \bar{\partial}v$ es $f$-invariante. Decimos que $v$ es una *deformación trivial* de $f$ si $f^*(v) = v$ (el levantamiento como un campo vectorial) o equivalentemente si $\delta v = 0$.

**Lema 2.** *Si $v : \hat{\mathbb{C}} \to T\hat{\mathbb{C}}$ es un campo vectorial continuo y se origina una deformación trivial de $f$ entonces $v$ es identicamente cero sobre el conjunto de Julia de $f$.*

*Demostración.* Si $\delta v = 0$ entonces

$$f'(z)v(z) = v(f(z))$$

para todo $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Entonces por la regla de la cadena,

$$(f^k)'(z)v(z) = v(f^k(z))$$

para todo $z \in \hat{\mathbb{C}}$ y para todo $k \geq 0$. En particular, si $z = p$ es un punto $k$-periódico de $f$, tenemos

$$(f^k)'(p)v(p) = v(p).$$

Si $(f^k)'(p) \neq 1$, lo cual es ciertamente el caso cuando $p$ es repulsor, entonces $v(p) = 0$. Así $v$ se anula en los puntos periódicos repulsores, y como estos son densos en el conjunto de Julia de $f$, se sigue el resultado. □

## Referencias


[1] Edson de Faria and Wellington de Mello, *Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2008.

[2] L. Carlenson and T. W. Gamelin. *Complex Dynamics.* Springer, 1992.

[3] E.M. Stein and R. Shakarchi. *Complex Analysis.* Princeton University Press, 2003.

[4] L.V. Ahlfors. *Complex Analysis.* McGraw-Hill, 1979.

[5] D. Sullivan. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of Fatou-Julia problem on wandering domains. Ann. Math. **122** (1985), 401-418.

[6] C.McMullen and D. Sullivan Quasiconformal homeomorphisms and dynamics III. The Teichmüller space of a holomorphic dynamical system. Adv. Math. **135**, 1998, pp. 351-395.

[7] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi and T. Ueda. Holomorphic dynamics. Cambridge University Press, 2000.