Comportamiento de la distancia hiperbólica próxima a la frontera

Mayo 2, 2012

Para la métrica hiperbólica del disco unitario (o la métrica de Poincaré) de densidad

$$\rho(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}$$

es obvio que si una sucesión $p_n \in \mathbb{D}$ tiende a un punto en $\partial\mathbb{D}$, la densidad (y por lo tanto, la distancia hiperbólica $d_\rho(0, p_n)$) tiende a infinito. Lo que deja de ser intuitivo es el comportamiento de los entornos alrededor de cada p_n y de un cierto diámetro hiperbólico. El siguiente resultado nos explica por qué los diámetros convergen a cero.

Dado un punto $z \in U$, su entorno abierto de radio $r > 0$ se define por

$$N_r(z) = \{w \in U \mid d_U(z, w) < r\},$$

donde d_U denota la distancia hiperbólica inducidad en U.

Teorema (Métrica hiperbólica próxima a la frontera) *Supongamos que $U \subset V$ son dominios hiperbólicos de la esfera de Riemann y sea $p_1, p_2, \ldots,$ una sucesión de puntos en U que convergen a un punto frontera $\hat{p} \in \partial U \subset V$. Entonces, para cada $r > 0$ fijo, todo el entorno $N_r(p_n)$ converge uniformemente a $\hat{p}$ cuando $n \to \infty$. En particular, si U tiene cerradura compacta en V y diam$_V$ denota el diámetro con respecto a la métrica hiperbólica en V, entonces*

$$\mathrm{diam}_V(N_r(p_n)) \to 0$$

de forma uniforme cuando p_n converge a ∂U.

Demostración. Notemos primero que si K es un conjunto compacto de U y si p_n converge a ∂U, entonces $N_r(p_n) \cap K = \emptyset$ para un n suficientemente grande.

Sea $N_r(0) \subset \mathbb{D}$ el disco de radio r (en la métrica hiperbólica) alrededor del origen. Como $\mathbb{D}$ es el cubriente universal de V, podemos construir aplicaciones $f_n : \mathbb{D} \to U$ tales que $f_n(0) = p_n$. De esta forma, podemos identificar cada entorno $N_r(p_n)$ con la imagen $f_n(N_r(0))$.

Para un conjunto compacto $K \subset U$ suficientemente grande, las componentes de $V \setminus K$ siguen siendo dominios hiperbólicos. Además para n suficientemente grande, aplicaciones $f_n|N_r(0)$ toman valores en $V \setminus K$ y por lo tanto, forman una familia normal. Como p_n converge a un punto de ∂U, entonces la sucesión p_n está contenida en un compacto de V. En dicho compacto $f_n|N_r(0)$ tiene una subsucesión que, localmente, es uniformemente convergente a una función límite holomorfa $f : N_r(0) \to V \setminus K$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la convergencia uniforme ocurre en todo el compacto $\overline{N_r(0)}$ (pues podemos elegir en un principio el radio $r + \epsilon$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño).

Afirmamos que f envía el disco $N_r(0)$ a un único punto de $\partial U \subset V$. En efecto, si la función límite f no es constante, entonces la imagen $f(N_r(0))$ resulta ser un subconjunto abierto de $V \setminus K$ y por lo tanto, esta imagen intersecta a U. Pero esto es imposible pues U tiene una extenuación $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ y por el argumento anterior, $f(N_r(0))$ debe ser disjunto de cada K_n (y por lo tanto de U).

Para la métrica hiperbólica d_V, denotemos por $d_n = \mathrm{diam}_V(N_r(p_n))$. Si d_n no converge a cero, existe una subsucesión d_{n_j} y una constante $\epsilon > 0$ tal que $d_{n_j} \geq \epsilon$. Por el argumento anterior, para dicha subsucesion de índices n_j, las aplicaciones $f_{n_j}|\overline{N_r(0)}$ convergen uniformemente a una función constante, lo cual es imposible.

$\square$

A partir del Teorema de 1/4 de Koebe, se puede lograr una estimación de la distancia de un punto interior a la frontera de un dominio hiperbólico. Sea $ds = \rho(z)|dz|$ la métrica hiperbólica en $U \subset \mathbb{C}$ y denotemos por $r(z)$ la distancia hiperbólica de $z \in U$ a ∂U.

Teorema *Si $U \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo, entonces la métrica hiperbólica $ds = \rho(z)|dz|$ en U es conmesurable con la métrica $z \mapsto |dz|/r(z)$ por un factor de 2, esto es,*

$$\frac{1}{2r(z)} \leq \rho(z) \leq \frac{2}{r(z)}$$

para toda $z \in U$.

References

[KL] Keen, L. & Lakic, N. *Hyperbolic Geometry from a Local Viewpoint.* London Mathematical Society Student Texts, 68. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[M] Milnor, J. *Dynamics in one complex variable.* Tercera edición, Annals of Mathematics Studies, 160. Pricenton. 2006.