CIMAT

90VCO02 | Variable Compleja II | Febrero 10, 2012

Tarea 1

1. Sean $f : G \to f(G)$ y $g : f(G) \to \mathbb{C}$ ambos C^1–difeomorfismos, con coordenadas z en G y ζ en $f(G)$. Verifique las siguientes expresiones.

   (a) $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$.

   (b) $(g \circ f)_z = (g_\zeta \circ f) f_z + (g_{\bar{\zeta}} \circ f)\overline{f_{\bar{z}}}$

   (c) $(g \circ f)_{\bar{z}} = (g_\zeta \circ f) f_{\bar{z}} + (g_{\bar{\zeta}} \circ f)\overline{f_z}$

2. Denote por $\Lambda \subset [0,1]$ el conjunto de tercio medio de Cantor. Defina la *Función de Cantor* $f : [0,1] \to [0,1]$ (o la función de la *escalera del diablo*) de la siguiente forma.

   Recuerde que el conjunto Λ consiste de todos los puntos $x \in [0,1]$ cuya representación en base 3 tiene la forma

   $$x = .x_1 x_2 \ldots x_n \ldots = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \ldots + \frac{x_n}{3^n} + \ldots,$$

   con $x_n \in \{0, 2\}$. Defina f como la función tal que para $x \in \Lambda$, $f(x)$ tiene representación en base 2

   $$f(x) = .\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n \ldots = \frac{\bar{x}_1}{2} + \frac{\bar{x}_2}{2^2} + \ldots + \frac{\bar{x}_n}{2^n} \ldots,$$

   donde $\bar{x}_n = 0$ si $x_n = 0$ y $\bar{x}_n = 1$ si $x_n = 2$.

   Demuestre que f es no decreciente y (aunque Λ tiene medida de Lebesgue cero)

   $$f(\Lambda) = [0,1].$$

3. Demuestre que la función de Cantor $f : [0,1] \to [0,1]$ tiene derivada $f'(x) = 0$ para casi todo punto en $[0,1]$, sin embargo, no es absolutamente continua sobre ese intervalo.

4. Defina la extensión de la función de Cantor a todo $\mathbb{R}$ por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

Defina $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por $F(x+iy) = x + i(y + \tilde{f}(x))$. Demuestre que F es un homeomorfismo que preserva orientación, $\partial_z F(x+iy) = 1$ y $\partial_{\bar{z}} F(x+iy) = 0$ para todo $x + iy \in \mathbb{C} - (\Lambda + i\mathbb{R})$.

5. Sea $f : U \to V$ un homeomorfismo, diferenciable en casi todo $z \in U$ y tal que $f_{\bar{z}} \equiv 0$ c.t.p. de U. ¿Es f necesariamente conforme? Justifique su respuesta.

6. Defina la *derivada esférica* de una función meromorfa $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ por

$$f^*(z) = \frac{2|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2},$$

donde $|\cdot|$ representa la norma euclideana. Demuestre lo siguiente

   (a) La derivada esférica es invariante bajo la inversión $z \mapsto 1/z$, esto es $(1/f)^* = f^*$.

   (b) Si $\gamma \subset \Omega$ es una curva simple y suave (a trozos), entonces su longitud esférica es

$$L_\sigma(f \circ \gamma) = \int_\gamma f^*(z)|dz|.$$

7. Si f_n es una sucesión de funciones meromorfas definidas sobre Ω y tales que con respecto a la métrica esférica, $f_n \rightrightarrows f$ en compactos de Ω, entonces $f_n^* \rightrightarrows f^*$ en compactos de Ω.

8. Demuestre la "versión esférica" del Teorema de Montel:
Si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones meromorfas sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces, $\mathcal{F}$ es una familia normal *si y sólo si* las derivadas esféricas $\{f^*(z) \mid f \in \mathcal{F}\}$ son uniformemente acotadas en compactos de Ω.

9. Sea $\mathcal{S} = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorfa, univalente, } f(0) = 0, |f'(0)| = 1\}$. Si dist denota la distancia euclideana, demuestre que para toda $f \in \mathcal{S}$

$$\frac{1}{4} \leq \operatorname{dist}(0, \partial f(\mathbb{D})) \leq 1.$$

10. Demuestre la siguiente versión del Teorema de Distorsión de Koebe:

   (a) Si $F \in \mathcal{S}$, demuestre que

   $$\left| \frac{F''(0)}{F'(0)} \right| \leq 4.$$

   (b) Sea $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, holomorfa y univalente. Elija $\alpha \in \mathbb{D}$ y considere la función

   $$F(z) = \lambda_\alpha^{-1}(g \circ T_\alpha(z) - g(\alpha)),$$

   donde $T_\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ y $\lambda_\alpha = g'(\alpha)(1-|\alpha|^2)$. Demuestre que $F \in \mathcal{S}$ y calcule $F''(0)/F'(0)$.

   (c) Deduzca la desigualdad

   $$\left| \frac{g''(\alpha)}{g'(\alpha)} \right| \leq \frac{4}{\mathrm{dist}(\alpha, \partial\mathbb{D})}.$$

Fecha de entrega: Febrero 29, 2012 en clase.