CIMAT

90VCO02 Variable Compleja II Marzo 10, 2012

Tarea 2

1. Denote por d_E la métrica euclideana. Demuestre que $(\mathbb{D}, d_E)$ es un espacio métrico no completo.

2. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa y ρ la densidad hiperbólica en $\mathbb{D}$. Demuestre que si $\overline{f(\mathbb{D})} \subsetneq \mathbb{D}$ entonces f contrae estrictamente la métrica hiperbólica. Esto es, existe $0 < \lambda < 1$ tal que para todo $z \in \mathbb{D}$
$$\rho(f(z))|f'(z)| \leq \lambda \rho(z).$$

3. Definamos el *conjunto postcrítico* de una función racional f de grado $d \geq 2$ como el conjunto
$$\mathcal{P}_f = \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{z \in C_f} f^n(z)$$
donde C_f denota el conjunto de puntos críticos de f. Demuestre que $\overline{\mathcal{P}_f} = \overline{\mathcal{P}_{f^n}}$ para todo $n \geq 1$.

4. Un punto $z \in \mathbb{C}$ es llamado *excepcional* si su *órbita grande*
$$[z] = \{w \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \text{existen } m, n \geq 0 \text{ tal que } f^m(w) = f^n(z)\}$$
es un conjunto de cardinalidad finita. Demuestre lo siguiente
   (a) Si $f \in \mathrm{Rat}_d$ con $d \geq 2$, entonces f tiene a lo más dos puntos excepcionales.
   (b) Si f sólo tiene un punto excepcional, entonces f es un polinomio.
   (c) Si f tiene exactamente dos puntos excepcionales, entonces f es conjugada a $z \mapsto z^{\pm d}$.

5. Sea $f : V \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con un punto fijo $z_0 \in V$ cuyo multiplicador, $\lambda = Df(z_0)$, satisface $0 < |\lambda| < 1$. Demuestre que existe una vecindad $D = D(z_0) \subset V$ y función holomorfa $\varphi : D \to \mathbb{C}$ tal que φ conjuga f a la transformación lineal $z \mapsto \lambda z$ (esto es, para todo $z \in D$, $\varphi \circ f(z) = \lambda \varphi(z)$) siguiendo los pasos descritos en el ejercicio 3.7 del libro [dFdM].

6. Demuestre que la conjugación φ es (localmente) única salvo por un múltiplo escalar no nulo.

7. Sea $f : V \to \mathbb{C}$ holomorfa con un punto fijo superatractor en $z_0 \in V$, de tal forma que en la vecindad $D = D(z_0)$ se tiene

$$f(z) = z_0 + a(z - z_0)^k + \dots,$$

para $k \geq 2$ y $a \neq 0$. Demuestre que existe una vecindad $U \subset V$ de z_0 y una función holomorfa $\varphi : U \to \mathbb{C}$ tal que para toda $z \in U$,

$$\varphi \circ f(z) = (\varphi(z))^k$$

esto es, f es localmente conjugada a $z \mapsto z^k$. Siga los pasos descritos en el ejercicio 3.11 del libro [dFdM].

8. Demuestre la unicidad de φ salvo multiplicación por una $(k-1)$-raíz de la unidad.

9. Demuestre que un polinomio no puede tener anillos de Herman.

10. Sea f una función racional de grado $d \geq 2$. Demuestre que $J_f = \widehat{\mathbb{C}}$ si y sólo si existe un punto $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{O}_f^+$ es un conjunto denso en la esfera de Riemann. (Ver ejercicio 3.17 en el libro [dFdM]).

Fecha de entrega: Marzo 30, antes de las 12hrs, en mi pichonera.