CIMAT

90VCO02 Variable Compleja II Abril 30, 2012

Tarea 3

1. Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional de grado $d \geq 2$ y defina
$$\Gamma = \{\gamma \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}}) \mid \gamma \circ f = f \circ \gamma\}.$$
Demuester que Γ es un grupo finito. (*Sug.:* Analice los puntos periódicos de f cuyo período mínimo es un número primo).

2. Sea $\alpha > 0$ y considere la aplicación $f_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(re^{i\theta}) = r^\alpha e^{i\theta}$. Demuestre que f_α es un homeomorfismo cuasiconforme y calcule su dilatación.

3. ¿Existe un homeomorfismo cuasiconforme que envíe el plano complejo al semiplano superior? Argumente su respuesta.

4. Sea $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{C})$ un subgrupo discreto del grupo de transformaciones de Möbius y sea $\mu \in L^\infty(\widehat{\mathbb{C}})$, $||\mu||_\infty < 1$ y Γ-invariante, esto es
$$\mu(\gamma(z))\frac{\overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(z)} = \mu(z)$$
para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ y toda $\gamma \in \Gamma$.
Si $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es una solución de la ecuación de Beltrami $\bar{\partial} f = \mu \partial f$, demuestre que $f \circ \gamma = \gamma \circ f$ para toda $\gamma \in \Gamma$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo diferenciable a trozos, tal que
$$\frac{1}{K} \leq f'(x) \leq K$$
para toda $x \in \mathbb{R}$, donde $K > 1$ es constante. Demuestre que existe una extensión $F : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ de f en el semiplano superior dada por
$$F(x,y) = f(x) + iy$$
tal que F es un homeomorfismo K-cuasiconforme.

Fecha de entrega: Mayo 16, en clase.