Comportamiento en la Frontera de Mapeos Cuasiconformes

CIMAT
Variable Compleja II
Perla Rebeca Sánchez Vargas
Mayo 2012

Parte restante de la sección 4.6

Definición 1 *Una diferencial de Beltrami $\mu \in \mathbb{D}$ se dice **trivial** si existe un campo vectorial v tal que $\bar{\partial} v = \mu$ y $v = 0$ en $\partial\mathbb{D}$.*

Lema 2 *Existe un espacio vectorial infinito $V \subset M(\mathbb{D})$ de diferenciales de Beltrami con soporte compacto tales que $\mu \in M(\mathbb{D})$ es trivial si y sólo si $\mu = 0$.*

Demostración :
Se define para cada $n-$tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$\mu_{a_1,a_2,\ldots,a_n}(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \bar{z}^{k-1} & \text{si } |z| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |z| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sea V el conjunto de $\mu_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ al variar $n \in \mathbb{N}$ y la $n-$tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

Obsérvese que:

$$1)\ (\mu_{a_1,a_2,\ldots,a_{n_1}} + \mu_{b_1,b_2,\ldots,b_{n_2}})(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k \bar{z}^{k-1} & \text{si } |z| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |z| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

donde $n = max\{n_1, n_2\}$ y $c_k = a_k + b_k$
luego V es cerrado bajo la suma.

2) V es asociativo.

3) Tomando $a_i = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene $\mu_0(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $(\mu_0 + \mu_{a_1,a_2,\ldots,a_n})(z) = \mu_{a_1,a_2,\ldots,a_n}(z)$.

4) Para todo $\mu_{a_1,a_2,\ldots,a_n}(z) \in V$ existe $\mu_{-a_1,-a_2,\ldots,-a_n}(z) \in V$ tal que $(\mu_{a_1,a_2,\ldots,a_n} + \mu_{-a_1,-a_2,\ldots,-a_n})(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Sean α y $\beta \in \mathbb{C}$

5) $\alpha((\mu_{a_1,a_2,\ldots,a_{n_1}} + \mu_{b_1,b_2,\ldots,b_{n_2}})(z)) = (\alpha\mu_{a_1,a_2,\ldots,a_{n_1}} + \alpha\mu_{b_1,b_2,\ldots,b_{n_2}})(z)$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

6) $(\alpha+\beta)\mu_{a_1,a_2,\ldots,a_n}(z) = \alpha\mu_{a_1,a_2,\ldots,a_n}(z) + \beta\mu_{a_1,a_2,\ldots,a_n}(z)$, $\forall z \in \mathbb{D}$

7) $(\alpha\beta)\mu_{a_1,a_2,\ldots,a_n}(z) = \alpha(\beta\mu_{a_1,a_2,\ldots,a_n}(z))$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

8) $1\mu_{a_1,a_2,\ldots,a_n}(z) = \mu_{a_1,a_2,\ldots,a_n}(z)$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

Por todo lo anterior se tiene que V $\subseteq M(\mathbb{D})$ es un espacio vectorial infinito.

Además

$$\mu_{a_1,a_2,\ldots,a_n}(z) = \bar{\partial} v_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$$

donde

$$v_{a_1,a_2,\ldots,a_n}(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\bar{z}^k & \text{si } |z| \leq \frac{1}{2} \\ \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k4^k} z^{-k} & \text{si } |z| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

es un campo vectorial continuo.

Si $\mu \in V$, tal que $\mu = 0$, entonces se tiene que $v = 0$, en particular $v = 0$ en $\partial\mathbb{D}$.

Supóngase que $\mu = \mu_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \in V$ es trivial, luego $\bar{\partial} w = \mu$ para algún w, con $w = 0$ en $\partial\mathbb{D}$

Dado que $\bar{\partial}(v_{a_1,a_2,\ldots,a_n} - w) = \bar{\partial} v_{a_1,a_2,\ldots,a_n} - \bar{\partial} w = \mu - \mu = 0$, se tiene que $v_{a_1,a_2,\ldots,a_n} - w$ es holomorfa en $\mathbb{D}$, al tomar la restricción de $v_{a_1,a_2,\ldots,a_n} - w$ a la frontera del disco se tiene que $v_{a_1,a_2,\ldots,a_n} - w|\partial\mathbb{D} = v$, ya que $w = 0$ en $\partial\mathbb{D}$, de esto se sigue que $v_{a_1,a_2,\ldots,a_n}|\partial\mathbb{D}$ tiene una extensión holomorfa a $\mathbb{D}$ dada por $v_{a_1,a_2,\ldots,a_n} - w$, además $v_{a_1,a_2,\ldots,a_n}|\partial\mathbb{D}$ es un polinomio en z^{-1}, de forma que $a_1 = a_2 = \cdots a_n = 0$, por tanto $\mu = 0$. □

Como consecuencia del lema anterior se tiene el siguiente resultado:

Lema 3 *Sea $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ un dominio simplemente conexo, y sea $\varphi : \mathbb{D} \to U$ la aplicación de Riemann. Supóngase que v es un campo vectorial en la esfera de Riemann tal que se anula en ∂U y $\mu = \bar{\partial} v|U$ es compactamente soportado. Enctonces el pull-back $\varphi^*(v)$ de v al disco unitario se anula en $\partial\mathbb{D}$, y el pull-back $\varphi^*(\mu)$ es trivial en $M(\mathbb{D})$.* □

Comportamiento en la Frontera de Mapeos Cuasiconformes

En la sección 4.3 se obtuvo un resultado en el que un homeomorfismo $K-$cuasiconforme $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ se extiende a un homeomorfismo $K-$cuasiconforme $\phi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, tomando $\Phi(z) = I \circ \phi \circ I(z)$, luego en particular define un homeomorfismo del círculo unitario.

De manera similar se un homeomorfismo $K-$cuasiconforme de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$ se extiende a un homeomorfismo $K-$cuasiconforme de la esfera de Riemann en sí misma, por tanto se tiene un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Definición 4 *Un homeomorfismo $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice $M-$**cuasisimétrico** si*

$$\frac{1}{M} \leq \frac{|\phi(x+t) - \phi(x)|}{|\phi(x) - \phi(x-t)|} \leq M$$

*para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $t \neq 0$; la M más pequeña tal que se cumple la desigualdad, es llamada **la distorsión cuasisimétrica de** ϕ.*

De manera similar, un homeomorfismo $h : S^1 \to S^1$ se dice $M-$**cuasisimétrico** si existe $M > 0$ tal que

$$\frac{1}{M} \leq \frac{|h(e^{i(\theta+t)}) - h(e^{i\theta})|}{|h(e^{i\theta}) - h(e^{i(\theta-t)})|} \leq M$$

Proposición 5 *Dado $K > 1$, existe $M > 1$, (el cual depende solamente de K), tal que el mapeo determinado por los valores en la frontera de cualquier homeomorfismo $K-$cuasiconforme de $\mathbb{H}$ es un homeomorfismo $M-$cuasisimétrico de $\mathbb{R}$.*

Demostración :
Sea $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ un homeomorfismo $K-$cuasiconforme con valores en la frontera $\phi(x)$ tal que $\phi(\infty) = \infty$, luego ϕ es una función creciente que cumple $\phi(\infty) = \infty$ y $\phi(-\infty) = -\infty$ ya que f preserva orientación.

Sean $x - t$, x, $x + t$ tres puntos en $\mathbb{R}$ y considere los cuadriláteros $\mathbb{H}(x - t, x, x + t, \infty)$, estos son conformemente equivalentes a $\mathbb{H}(-1, 0, 1, \infty)$ por medio de una transformación de Möbius dada por $T(z) = (z - x)t^{-1}$, por tanto tienen el mismo módulo.

Tomando en cuenta el siguiente resultado:
$''$ Un cuadrilátero $Q = Q(z_1, z_2, z_3, \infty)$ es conformemente equivalente a un cuadrado si $z_3 - z_2 = z_2 - z_1$ $''$.
(O. Lehto, K. I. Virtanen, Quasiconformal Mappings in the Plane, 1970, pág 81)

Así $\mathbb{H}(-1, 0, 1, \infty)$ es conformemente equivalente a un cuadrado de lado a, pero éste a su vez es conformemente equivalente a un cuadrado de lado 1 y por tanto tiene módulo igual a 1 .

De forma que $mod(\mathbb{H}(x - t, x, x + t, \infty)) = mod(\mathbb{H}(-1, 0, 1, \infty)) = 1$.

Dado que f es $K-$cuasiconforme y $\overline{\mathbb{H}(-1, 0, 1, \infty)} \subseteq \mathbb{H}$ se tiene que la imagen de éste cuadrilátero es un cuadrilátero cuyo módulo está acotado lejos de infinito y lejos de cero por constantes que dependen solo de K

$$\frac{1}{K} mod(\mathbb{H}(-1, 0, 1, \infty)) \leq mod(f(\mathbb{H}(-1, 0, 1, \infty)) \leq K mod(\mathbb{H}(-1, 0, 1, \infty))$$

Luego

$$\frac{1}{K} \leq mod(f(\mathbb{H}(-1, 0, 1, \infty)) \leq K$$

Como f preserva orientación se toman $\phi(x) = y$, $\phi(x-t) = y - A$ y $\phi(x+t) = y + B$, con $A,\ B \in \mathbb{R}$

Considerando el cuadrilátero $\mathbb{H}(y-A, y, y+B, \infty)$, se tiene que mod$(\mathbb{H}(y-A, y, y+B, \infty))$ es acotado lejos del cero y de infinito si y sólo si $\frac{A}{B}$ es acotado lejos del cero y de infinito.

Como mod$(\mathbb{H}(y-A, y, y+B, \infty))$ está acotado por ser la imagen bajo f de $\mathbb{H}(x-t, x, x+t, \infty)$
Así existe una $M > 0$ que solo depende de K tal que

$$\frac{1}{M} \leq \frac{A}{B} \leq M$$

$$\frac{1}{M} \geq |\frac{B}{A}| \geq M$$

$$\frac{1}{M} \geq \frac{|\phi(x+t) - \phi(x)|}{|\phi(x) - \phi(x-t)|} \geq M$$

□

Teorema 6 *Dado $L > 1$, existe $K > 1$,(el cual depende solamente de L), tal que cualquier homeomorfismo $L-$cuasisimétrico $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene una extensión a un homeomorfismo $K-$cuasiconforme $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$.*

Para la demostración se da una fórmula explícita de la extensión

Tomando

$$u(x,y) = \frac{1}{2y} \int_{-y}^{y} \phi(x+t)dt,$$

$$v(x,y) = \frac{1}{2y} \int_{0}^{y} (\phi(x+t) - \phi(x-t))dt.$$

La extensión está dada por $\Phi(x) = u(x,y) + iv(x,y)$, Φ extiende a ϕ de forma continua, haciendo el cambio de coordenadas se obtiene

$$u(x,y) = \frac{1}{2y} \int_{x-y}^{x+y} \phi(t)dt,$$

$$v(x,y) = \frac{1}{2y}\left[\int_x^{x+y} \phi(t) - \int_{x-y}^{x} \phi(t)dt\right].$$

La extensión de Douady-Earle

Douady-Earle probaron la existencia de una función $\mathcal{E}$ del espacio de homeomorfismos del círculo que preserva orientación al espacio de homeomorfismos de la cerradura de $\mathbb{D}$, esto es naturalmente conforme en el sentido en que $\mathcal{E}$ es equivariante con respecto a la acción del grupo de Möbius.

Si un grupo G actua en dos espacios X e Y, un mapeo $F : X \to Y$ se dice **equivariante** si $F(gx) = gF(x)$.

Considérese la acción del grupo $M(\mathbb{D})$ de transformaciones de Möbius que preservan el disco unitario en la clausura del disco: $M(\mathbb{D}) \times \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$, dada por $(g, z) \mapsto g(z)$. Esto restringe a una acción en el círculo S^1, el cual induce una acción en varios espacios:

1) En el espacio $P(S^1)$ de medidas de probabilidad en S^1 por medio de un push-forward: $(g, \mu) \mapsto g^*\mu$, donde $g^*\mu(A) = \mu(g^{-1}(A))$;

2) En los espacios de funciones continuas $C^0(S^1)$ y $C^0(\overline{\mathbb{D}})$ por medio de $gf(x) = f \circ g^{-1}$;

3) En el espacio de campos vectoriales continuos en $\mathbb{D}$, $\chi^0(\mathbb{D})$, por $gV(t) = Dg(g^{-1}(t))V(g^{-1}(t))$ y en los espacios de homeomorfismos $Homeo(S^1)$ y $Homeo(\overline{\mathbb{D}})$ por composición, $(g, \phi) \mapsto \phi \circ g^{-1}$, y también por $(g, \phi) \mapsto g \circ \phi$.

Bibliografía

[1] Lars V. Ahlfors, Lectures on Quasiconformal mappings, 1966.

[2] O. Lehto, K. I. Virtanen, Quasiconformal Mappings in the Plane, 1970.

[3] Edson de Faria, Welington de Melo, Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics, 2008