Transformaciones tipo-polinomiales

Thalía Elizabeth Venegas Gil

Resumen

La teoría de transformaciones tipo-polinomiales de A. Douady y J. Hubbard ayuda a entender una clase más amplia de funciones: las que localmente se comportan como polinomios. Este trabajo muestra el teorema de rectificación como consecuencia de la cirugía cuasiconforme por M. Shishikura.

Definición 1. *Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$ simplemente conexos, cuya frontera consiste en curvas real-analíticas de Jordan y satisfacen $\overline{U_1} \subset U_2$. Sea $f : U_1 \to U_2$ holomorfa, propia de grado $d \geq 2$ y que se extiende continuamente a ∂U_1. Entonces (f, U_1, U_2) es una transformación tipo-polinomial.*

Ejemplo 1. *Sean $f(z) = \pi \cos(z)$, $U' = \{z \in \mathbb{C} : \ |Im(z)| < 1.7 \ y \ |-\pi - Re(z)| < 2\}$ y $U = f(U')$.*

U' es un dominio simplemente conexo y $\overline{U'} \subset U$. Como U' tiene sólo un punto crítico $\omega = -\pi$ se sigue que f mapea U' en U con grado 2. Por lo tanto $(f|_{U'}, U', U)$ es una transformación tipo-polinomial de grado 2 (ver Figura 1).

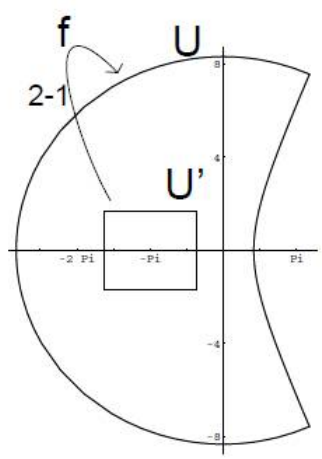

Figura 1: La restricción de $f(z) = \pi \cos z$ para crear una transformación tipo-polinomial de grado 2 (figura cortesía de N. Fagella [3]).

Ejemplo 2. *Cualquier polinomio p puede ser restringido a un dominio U_1 tal que $(p|_{U_1}, U_1, p(U_1))$ sea una transformación tipo-polinomial del mismo grado.*

Ejemplo 3. *Sea p un polinomio de grado d y sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto, tal que p^{-1} tiene varias componentes conexas $U_1', \ldots, U_k'$ con $k \leq d$. Si $\overline{U_1'} \subset U$, entonces $(p|_{U_1'}, U_1', U)$ es una transformación tipo-polinomial de grado $d_1 < d$.*

En esta situación se puede obtener mejor información del comportamiento de p en U_1' considerándolo como una transformación tipo-polinomial de grado d_1, que como un polinomio de grado d, especialmente cuando $d = 128$ y $d_1 = 2$ (ver [1]).

Definición 2. *Sea (f, U_1, U_2) una transformación tipo-polinomial. El conjunto lleno de Julia de f, K_f se define como el conjunto de puntos en U_1 que bajo iteración no se salen de U_1, es decir,*

$$K_f = \{z \in U_1 : \ f^n(z) \in U_1, \ \textit{para toda } n \geq 0\}.$$

Una definición equivalente es $K_f = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(U_1)$.

Y definimos el conjunto de Julia de (f, U_1, U_2) como $J_f = \partial K_f$.

El teorema de rectificación muestra que la relación entre polinomios y transformaciones tipo-polinomiales es muy fuerte. Veamos algunos tipos de equivalencias entre transformaciones tipo-polinomiales:

Sean (f, U_1, U_2) y (g, V_1, V_2) dos transformaciones tipo-polinomiales de grado d. La equivalencia más débil, pero muy importante entre f y g es la equivalencia topológica o la conjugación topológica, y se denota por $\sim_{top}$.

Definición 3. *Decimos que $f \sim_{top} g$ si existe un homeomorfismo φ de una vecindad $\mathcal{N}(K_f)$ de K_f a una vecindad $\mathcal{N}(K_g)$ de K_g tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}'(K_f) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{N}(K_f) \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathcal{N}'(K_g) \arrow[r, "g"'] & \mathcal{N}(K_g)
\end{tikzcd}$$

conmuta, donde $\mathcal{N}'(K_f) \subset \mathcal{N}(K_f)$ y $\mathcal{N}'(K_g) \subset \mathcal{N}(K_g)$.

Si dos funciones son topológicamente conjugadas, su dinámica es cualitativamente "la misma", ya que la conjugación φ mapea órbitas de f a órbitas de g, puntos periódicos de f a puntos periódicos de g, puntos críticos de f a puntos críticos de g, etc. En particular, K_f debería ser transformado a K_g, pero como φ sólo es un homeomorfismo estos conjuntos pueden verse bastante diferente.

Por otro lado, la equivalencia más fuerte entre dos transformaciones holomorfas es la equivalencia conforme.

Definición 4. *Decimos que f y g son conformemente equivalentes si $f \sim_{top} g$ y el homeomorfismo φ es conforme. Se denota $f \sim_{conf} g$*

El concepto de transformación cuasiconforme aparece cuando queremos considerar clases de conjugaciones más fuertes que la topológica, pero más débiles que las conformes.

Para homeomorfismos, no tenemos ningún tipo de control en cómo los ángulos están distorsionados. Por otro lado, las transformaciones conformes preservan ángulos. Intuitivamente, una transformación es cuasiconforme si tenemos algún control en la distorsión de los ángulos aún cuando no se preserven, es decir, la distorsión de los ángulos está acotada.

Definición 5. *Definimos la conjugación cuasiconforme ($f \sim_{qc} g$) si $f \sim_{top} g$ y el homeomorfismo φ es K-cuasiconforme para algún $K \geq 1$. Y decimos que f y g son híbrido equivalentes ($f \sim_{hb} g$) si $f \sim_{qc} g$ y φ puede ser escogido de tal forma que $\overline{\partial}_z \varphi = 0$ casi en todas partes en K_f.*

Claramente $f \sim_{conf} g \Rightarrow f \sim_{hb} g \Rightarrow f \sim_{qc} g \Rightarrow f \sim_{top} g$.

El teorema de rectificación es un ejemplo de cirugía para transformaciones tipo-polinomiales (Lema 4.9.2 en [5]). Y nos dice que una transformación tipo-polinomial es híbrido equivalente a un polinomio del mismo grado.

Teorema 1 (Teorema de rectificación)**.** *Sea (f, U_1, U_2) una transformación tipo-polinomial de grado $d \geq 2$. Entonces existe un polinomio $p(z)$ y una transformación cuasiconforme ϕ tal que $\phi \circ f = p \circ \phi$ en U_1. Si K_f es conexo, entonces p es único salvo una transformación afín.*

Demostración. Sean $R > 1$ y $\Phi : \overline{\mathbb{C}} - \overline{U_2} \to \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : \ |z| > R^d\right\}$ conforme tal que $\Phi(\infty) = \infty$. Entonces Φ se extiende (real) analíticamente a ∂U_2 y f a ∂U_1. Como $f : \partial U_1 \to \partial U_2$ y $z \mapsto z^d$ en $\left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : \ |z| = R\right\}$ son cubrientes de grado d, $\Phi : \partial U_2 \to \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : \ |z| = R^d\right\}$ puede ser levantada a una transformación suave $\Phi : \partial U_1 \to \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : \ |z| = R\right\}$ tal que $\Phi \circ f(z) = (\Phi(z))^d$ en ∂U_1.

$$\begin{array}{ccc} \partial U_1 & \xrightarrow{\Phi} & \{|z| = R\} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle z \mapsto z^d} \\ \partial U_2 & \xrightarrow[\Phi]{} & \left\{|z| = R^d\right\} \end{array}$$

Es posible extender Φ a $U_2 - \overline{U_1}$ como una transformación cuasiconforme en $\left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : \ R < |z| < R^d\right\}$. (Para justificar la construcción anterior ver secciones 3.3 y 4.3 en [5]).

Definamos

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z \in U_1 \\ \Phi^{-1}(\Phi(z)^d) & z \in \overline{\mathbb{C}} - U_1 \end{cases}$$

g es continuo en ∂U_1 y define un mapeo cuasiregular.

Sea $E = \overline{\mathbb{C}} - \overline{U_1}$, entonces $g(E) = \Phi^{-1}(\Phi(z)^d)(E) \subseteq E$. Además $\Phi \circ g \circ \Phi^{-1}$ es analítica en $\Phi(E)$ pues $\Phi g \Phi^{-1}(\Phi(E)) = \Phi g(E) = \Phi\Phi^{-1}(\Phi(z)^d) = \Phi(E)^d$ y $g_{\overline{z}} = 0$ ctp en $\overline{\mathbb{C}} - g^{-1}(E)$, ya que $g^{-1}(E) \subset U_1$.

Aplicando el lema fundamental de cirugía a g, $E = \overline{\mathbb{C}} - \overline{U_1}$, Φ y $N = 1$ existe un mapeo cuasiconforme ϕ de $\overline{\mathbb{C}}$ y una función racional tal que $p(z) = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$. Notemos que p es un polinomio de grado d ya que $p^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ siempre que $\phi(\infty) = \{\infty\}$ (ver Teorema de la aplicación medible de Riemann).

Para la unicidad ver [1] y [5].

$\square$

Corolario 1. *Si f es un polinomio de grado $d \geq 2$, entonces el número de órbitas periódicas de f que son atractoras o indiferentes es menor o igual a $d-1$.*

Demostración. Supongamos que no, entonces podemos elegir $E \subset \mathbb{C}$ finito que consiste en más de $d-1$ órbitas periódicas de f que son atractoras o indiferentes. Restrinjamos f a una transformación tipo-polinomial $f : U_1 \to f(U_1)$. Sea p un polinomio con las siguientes propiedades:

1. p se anula en E.
2. Si $f'(z) = 0$ para $z \in E$, entonces $p'(z) = 0$.
3. Para cada $z \in E$ que no es punto crítico de f, tenemos $|f'(z) + tp'(z)| < |f'(z)|$ para todo $0 < t \leq 1$.

Entonces todos los puntos en E son periódicos atractores para la función $f + tp$ para cualquier $0 < t \leq 1$. Sin embargo, si t es suficientemente pequeño, $(f + tp)|_{U_1}$ es nuevamente una transformación tipo-polinomial de grado d. Por el teorema de rectificación existe un polinomio de grado d que tiene más de $d-1$ órbitas periódicas atractoras, que es una contradicción (ver Corolario 3.7.2 en [5]). $\square$

Referencias

[1] A. Douady & J. H. Hubbard. *On the dynamics of polynomial-like mappings.* Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 18 (1985).

[2] M. Shishikura. *On the quasiconformal surgery of rational functions.* Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 20 (1987).

[3] N. Fagella. *The theory of polynomial-like mappings – The importance of quadratic polynomials.* "Proceedings of the 7th EWM meeting", Madrid (1995).

[4] L. Ahlfors. *Lectures on quasi-conformal mappings*, second edition (2006).

[5] Edson de Faria and Wellington de Mello. *Mathematical tools for one-dimensional dynamics.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics (2008).