

Ejemplos de mapeos de Poincaré

El mapeo de Poincaré es una herramienta importante para el estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales tanto autónomas como no autónomas. Dos aplicaciones en el segundo caso son las siguientes¹.

Flujo de dos ondas

El sistema Hamiltoniano no conservativo asociado a la función

$$H(x, y, t) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2\pi^2} [a \cos(2\pi x) + b \cos(2\pi(kx - t))],$$

es conocido como *flujo de dos ondas*, donde $k \in \mathbb{Z}$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Por la periodicidad de la función coseno, es más natural describir la dinámica del sistema cuando (x, y, t) toma valores en $\mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$. La sección de Poincaré se elige como $\Sigma \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ y el mapeo se define como el tiempo 1 del flujo, esto es $\mathcal{P}(x, y) = (x(1), y(1))$.

En la figura 1 se muestran aproximaciones numéricas de algunas órbitas bajo \mathcal{P} cuando $a = b = 0.3$ y $k = 2$. Notemos la existencia de una variedad de comportamientos asintóticos: existen órbitas bajo \mathcal{P} que describen curvas cerradas mientras que podemos identificar al menos tres órbitas “caóticas” (en colores azul, negro y violeta) donde cada una llena un abierto del la sección Σ .

Oscilador forzado de Duffing

Otro ejemplo interesante es el sistema Hamiltoniano no conservativo asociado a la función

$$H(x, y, t) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2(1 - x^2) - ax \cos(2\pi t), \quad a \in \mathbb{R}.$$

El sistema Hamiltoniano asociado es conocido como el *oscilador forzado de Duffing*. Físicamente, el oscilador forzado describe la dinámica de una masa colgando de un resorte con cierta fuerza de reestoración ($F_1(x) = x^2(1 - x^2)/2$) y con una fuerza exterior periódica ($F_2(x, t) = ax \cos(2\pi t)$). Para $t = 1$, las iteraciones del mapeo de Poincaré, $\mathcal{P}(x, y) = (x(1), y(1))$, se muestran en la figura 2 para el caso $a = 3$.

¹Las figuras fueron realizadas con el programa `StdMap`, de J. D. Meiss, U. Colorado.

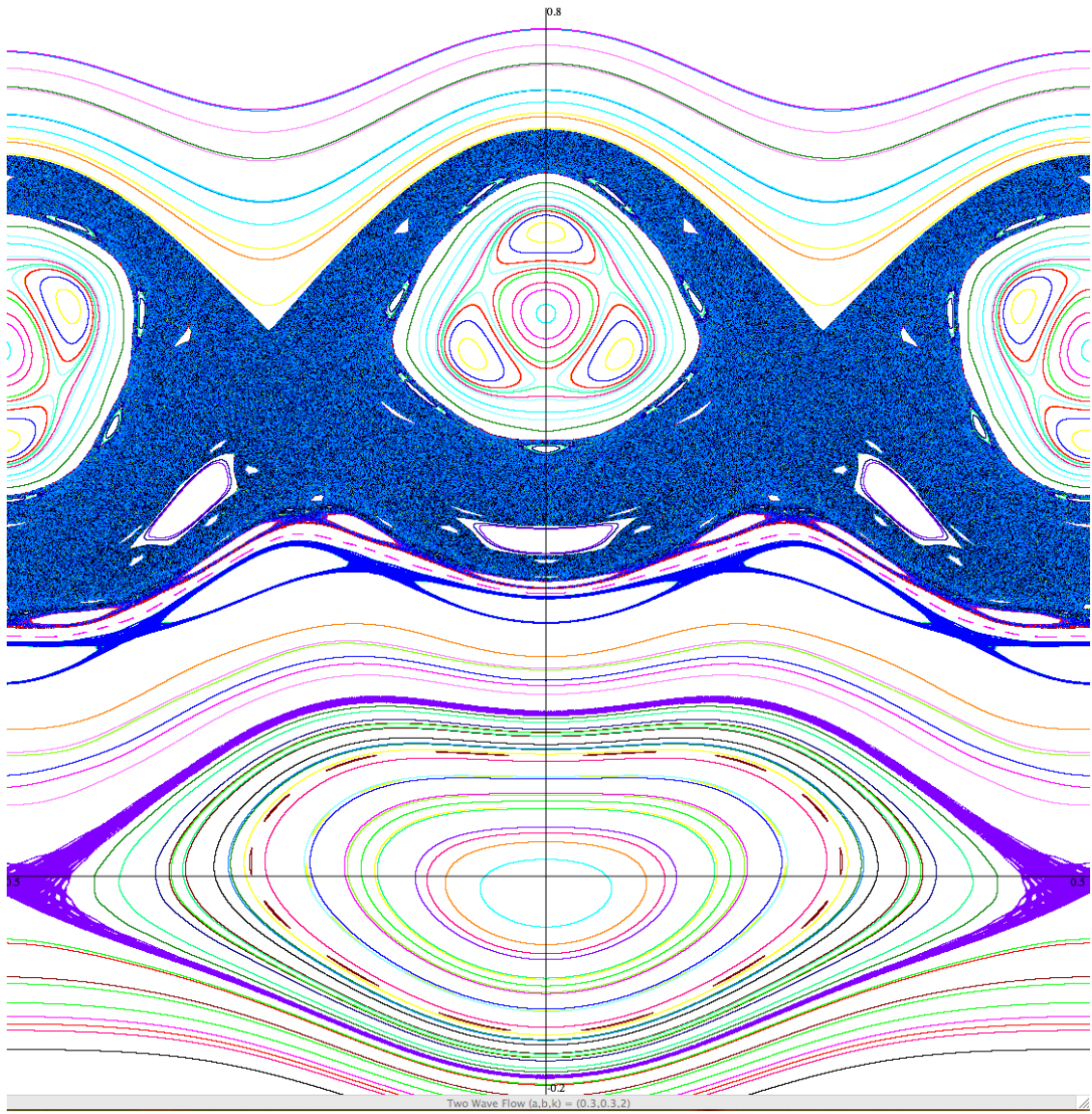


Figure 1: Flujo de dos ondas

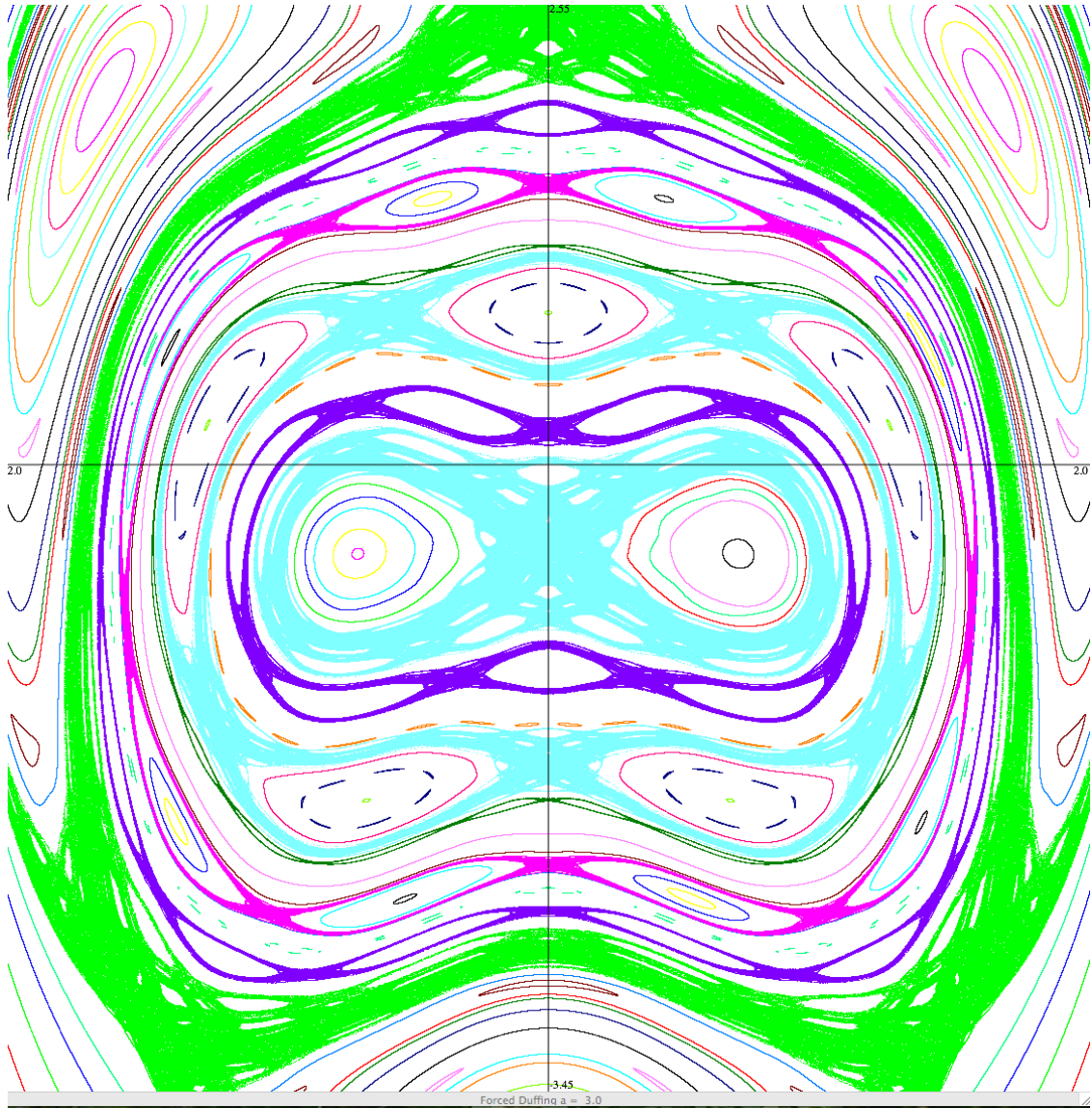


Figure 2: Oscilador forzado