Si f es C^1-Fréchet $\Rightarrow$ dados $x, h \in \mathbb{X}$ tq $x + th \in \mathcal{U}$ $\forall t \in [0,1]$

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)\cdot h + R(x,h) \quad \text{---} \; ③$$

donde el residuo es $R(x,h) = \int_0^1 \left[Df(x+th)\cdot h - Df(x)\cdot h \right] dt$

y satisface $\| R(x,h) \|_{\mathbb{X}} \leq k \cdot \|h\|_{\mathbb{X}}^2$ para algún $k>0$, $\|h\|_{\mathbb{X}}$ suf. peq.

Proposición Sea $J_0 \subset J$ compacto, $t_0 \in J_0$. Si $|\cdot|$ denota la norma de E,

$$\lim_{u_0 \to 0} \frac{|\varphi_t(y_0+u_0) - y(t) - u(t)|}{|u_0|} = 0$$

uniformemente en $t \in J_0$: ie $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ tq $|u_0| \leq \delta$ entonces

$$|\varphi_t(y_0+u_0) - (y(t)+u(t))| \leq \varepsilon |u_0| \quad \forall t \in J_0.$$

Demo: Ecuaciones integrales $\quad y(t) = y_0 + \int_0^t f(y(s))\, ds$

$$\varphi_t(y_0+u_0) = y_0 + u_0 + \int_0^t f(\varphi_s(y_0+u_0))\, ds$$

$$u(t) = u_0 + \int_0^t A(s)\, u(s)\, ds.$$

$$= u_0 + \int_0^t Df(y(s))\, u(s)\, ds.$$

$$\Rightarrow g(t) := |\varphi_t(y_0+u_0) - y(t) - u(t)| \leq \int_0^t \left| f(\varphi_s(y_0+u_0)) - f(y(s)) - Df(y(s))\,u(s) \right| ds$$

Sea $B \subset \mathcal{U}$ compacto, con $u_0, y_0, y_0+u_0 \in B$. Aplicando ③ con

$h = \varphi_s(y_0+u_0) - y(s)$, $x = y(s)$, $x+h = \varphi_s(y_0+u_0)$, tenemos al substituir $f(\varphi_s) - f(y)$