$$\cancel{g(t) \leq \int_0^t \left| R[y(s), \varphi_s(y_0+u_0) - y(s)] \right| ds}$$

$$g(t) \leq \int_0^t \left| \underline{Df(y(s))} \cdot (\underbrace{\varphi_s(y_0+u_0) - y(s)}_{h}) + R(y(s), h) - \underline{Df}(y(s))\, u(s) \right| ds$$

$$\leq \int_0^t \|Df(y(s))\| \left| h - u(s) \right| + \int_0^t |R(y(s), h)|\, ds \quad \ldots (4)$$

Sea $M = \max_{J_0} \|Df(y(s))\|$. Entonces

$$g(t) \leq M \int_0^t g(s)\, ds + \int_0^t |R(y(s), h)|\, ds \ldots (5).$$

Como $\underline{f \in C^1(U, E)}$ (en el sentido Fréchet) $\Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_0 > 0$ suf. peq. tq

$$|R(y(s), \varphi_s(y_0+u_0) - y(s))| \leq \varepsilon |\varphi_s(y_0+u_0) - y(s)|^2 = \varepsilon |h|^2 \ldots (6)$$

siempre y cuando $|h| \leq \delta_0$ para todo $s \in J_0$. La existencia de δ_0 se asegura, pues

Por $\underline{\text{DCCI V.1.}}$ $\exists K > 0$ y $\delta_1 > 0$ para los cuales

$$|h|^2 = |\varphi_s(y_0+u_0) - y(s)|^2 \leq |u_0|^2 \exp[2K \cdot s] \leq: \delta_0^2 \ldots (7)$$

siempre y cuando $|u_0| \leq \delta_1$ y $s \in J_0$.

Eligiendo $|u_0| \leq \delta_1$, de (5), (6) y (7) obtenemos

$$g(t) \leq M \int_0^t g(s)\, ds + \int_0^t \varepsilon |u_0|^2 \exp[2Ks]\, ds \qquad \forall t \in J_0,\ (t > 0)$$

$$\leq M \int_0^t g(s)\, ds + \varepsilon |u_0|^2 \left(e^{2Kt} - 1 \right)$$

$$\leq M \int_0^t g(s)\, ds + \varepsilon |u_0|^2 \cdot C, \qquad C = e^{2Kl}, \quad l = \log g(J_0)$$

Aplicando la desigualdad de Grönwall, se obtiene el resultado buscado.