CIMAT

90EDO01 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Abril 17, 2013

Notas Complementarias
Equivalencia vs. Conjugación

Consideremos los sistemas no lineales $\bar{x}' = f(\bar{x})$ y $\bar{y}' = g(\bar{y})$ con flujos $\varphi_t(\bar{x})$ y $\psi_t(\bar{y})$, respectivamente. Supongamos $f : M \to M$ y $g : N \to N$, donde M, N son espacios Banach de dimensión finita (p. ej. $\mathbb{R}^n$).

Definición 1 (Conjugación)**.** *Decimos que los flujos φ y ψ son topológicamente* conjugados *si existe un homeomorfismo $h : M \to N$ tal que, para todo $\bar{x} \in M$ y todo $t \in I_{\bar{x}}$,*

$$h(\varphi_t(\bar{x})) = \psi_t(h(\bar{x})).$$

Bajo conjugación, **el homeomorfismo sólo debe preservar la parametrización del tiempo**. Por lo tanto, los flujos asociados a las matrices $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ con $\operatorname{Spec}(A) = \{1, 2\}$ y $\operatorname{Spec}(B) = \{-1, -2\}$ son conjugados bajo la inversión $h(\bar{x}) = 1/\bar{x}$ (visto como aplicación en $\widehat{\mathbb{C}}$, la esfera de Riemann).

Definición 2 (Equivalencia)**.** *Los flujos φ y ψ son topológicamente* equivalentes *si existe un homeomorfismo $h : M \to N$ que preserva orientación y envía trayectorias en trayectorias. Esto es, para todo $\bar{x} \in M$ y todo $t \in I_{\bar{x}}$,*

$$h(\varphi_t(\bar{x})) = \psi_{s(t,h(x))}(h(x))$$

donde $s : I_{\bar{x}} \to I_{h(\bar{x})}$ es una función creciente para cada $\bar{x}$.

En la equivalencia, **el homeomorfismo preserva orientación de las curvas solución**, pero no necesariamente la parametrización del tiempo. Esto hace que la clasificación de flujos bajo equivalencia tengan un sentido más "dinámico".

Observación 1. *Noten que si dos flujos son conjugados, entonces también son equivalentes, pero dos flujos equivalentes que difieran en la parametrización del tiempo no podrán ser conjugados.*

Ejemplo

Consideren los sistemas lineales $\bar{x}' = A\bar{x}$ y $\bar{y}' = B\bar{y}$ donde

$$\mathrm{Spec}(A) = \{\pm i\} \quad \text{y} \quad \mathrm{Spec}(B) = \{\pm 2i\}.$$

Las respectivas soluciones que pasan por las condiciones iniciales $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$ en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ son

$$\varphi_t(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \cos(t) - x_2 \sin(t) \\ x_1 \cos(t) + x_2 \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad \psi_t(\bar{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \cos(2t) - y_2 \sin(2t) \\ y_1 \cos(2t) + y_2 \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Ambas trayectorias solución forman círculos concéntricos alrededor del origen y descritos con orientación positiva. Como ambos son centros, los sistemas son equivalentes, pues basta definir $h(\bar{x}) = \bar{x}$ y $s(t, h(\bar{x})) = t/2$. Sin embargo, no pueden ser conjugados, ya que si h preserva el tiempo, entonces deja de ser una biyección sobre las trayectorias. Esto se debe a que bajo el flujo ψ, la circunferencia se recorre dos veces en el mismo tiempo en que φ la recorre una vez.

Ejercicio

Consideren los sistemas lineales de coeficientes constantes $\bar{x}' = A\bar{x}$ donde A es alguna de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Identifica los flujos que son equivalentes y los que son conjugados proporcionando el homemorfismo y la parametrización del tiempo (en caso de equivalencias).