CIMAT

90EDO01 | Ecuaciones Diferenciales Ordinarias | Abril 11, 2013

Notas Complementarias
Lección 18

El resultado principal demostrado en la lección 18 es el siguiente.

Teorema 1. *Para $U \subset E$ abierto, $f : U \to E$, C^1, $\hat{x} \in U$ punto de equilibrio para el sistema $\bar{x}' = f(\bar{x})$, si $\hat{x}$ es estable, entonces $Re(\lambda) \leq 0$ para todo $\lambda \in Spec(Df(\hat{x}))$.*

El espacio E tiene una descomposición $E = E^u \oplus E^s$, y para $\bar{x} = (x_u, x_s)$, el campo f se descompone como

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \left(A^u x_u + R_1(x_u, x_s), A^s x_s + R_2(x_u, x_s)\right), \\ &= \left(f_u(x_u, x_s), f_s(x_u, x_s)\right), \end{aligned} \tag{1}$$

donde $A = A^u \oplus A^s = Df(\hat{x})$. En cada subespacio E^σ podemos aplicar el lema de normas adaptadas y mostrar que existen constantes $\alpha > \beta > 0$ tales que

$$\langle A^u x_u, x_u \rangle \geq \alpha |x_u|^2, \quad \text{y} \quad \langle A^s x_s, x_s \rangle < \beta |x_s|^2, \tag{2}$$

para todo $x_u \in E^u$ y todo $x_s \in E^s$. Denotamos por C el cono $|x_u| \geq |x_s|$.

Lema 1. *Existe $\delta > 0$ tal que, si $B_\delta(0) \subset U$, entonces para todo (x_u, x_s) en $B_\delta(0) \cap C$,*

(a) si $x_u \neq 0$, entonces

$$\langle x_u, f_u(x_u, x_s) \rangle - \langle x_s, f_s(x_u, x_s) \rangle > 0.$$

(b) Existe $c > 0$ tal que

$$\langle f(\bar{x}), \bar{x} \rangle \geq c |\bar{x}|^2.$$

Demo: Sea $\bar{x} \in B_\delta(0) \cap C$ fijo. Recordemos que el producto interior en E es la suma de los productos adaptados en cada subespacio E^σ, esto es,

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle x_s, y_s \rangle + \langle x_u, y_u \rangle.$$

A partir de la descomposición del campo dado en (1), se obtiene

$$\langle f(\bar{x}), \bar{x} \rangle = \langle A^u x_u, x_u \rangle + \langle A^s x_s, x_s \rangle + \langle R(\bar{x}), \bar{x} \rangle.$$

Usando las acotaciones en (2) de los productos adaptados en cada subespacio,

$$\langle f(\bar{x}), \bar{x} \rangle \geq \alpha |x_u|^2 - \beta |x_s|^2 + \langle R(\bar{x}), \bar{x} \rangle. \tag{3}$$

Sabemos que $|R(\bar{x})| \leq \varepsilon |\bar{x}|^2$ para todo $\bar{x} \in B_\delta(0)$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Aplicando la desigualdad de Cauchy al último término del lado derecho de (3) y usando $|\bar{x}|^3 < |\bar{x}|^2$ pues $|\bar{x}| < \delta << 1$, se sigue

$$\langle f(\bar{x}), \bar{x} \rangle \geq \alpha |x_u|^2 - \beta |x_s|^2 - \varepsilon |\bar{x}|^2. \tag{4}$$

Como hemos elegido $\bar{x} \in C$, entonces $|\bar{x}|^2 := |x_u|^2 + |x_s|^2 \leq 2|x_u|^2$. Reescribiendo el lado derecho de (4) en términos de $|x_u|^2$ y notando que $|x_u|^2 \geq |\bar{x}|^2/2$, se obtiene

$$\langle f(\bar{x}), \bar{x} \rangle \geq c|\bar{x}|^2$$

para $c > 0$, lo que demuestra (b).

Para demostrar (a), notemos que al usar la descomposición del campo dado en (1), la diferencia

$$\langle x_u, f_u(\bar{x}) \rangle - \langle x_s, f_s(\bar{x}) \rangle = \langle x_u, A^u x_u \rangle - \langle x_s, A^s x_s \rangle + \langle x_u, R_1(\bar{x}) \rangle - \langle x_s, R_2(\bar{x}) \rangle.$$

Por otro lado,

$$\big| \langle x_u, R_1(\bar{x}) \rangle - \langle x_s, R_2(\bar{x}) \rangle \big| \leq 2 |\langle R(\bar{x}), \bar{x} \rangle| \leq 2\varepsilon |\bar{x}|^2.$$

Por lo tanto, usando de nuevo las acotaciones de las normas adaptadas,

$$\begin{aligned} \langle x_u, f_u(\bar{x}) \rangle - \langle x_s, f_s(\bar{x}) \rangle &\geq \alpha |x_u|^2 - \beta |x_s|^2 - 2\varepsilon |\bar{x}|^2 \\ &\geq \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - 2\varepsilon \right) |\bar{x}|^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

si elegimos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

$\square$