CIMAT

90EDO01 | Ecuaciones Diferenciales Ordinarias | Junio 6, 2013

Examen Final

Tiempo máximo: 3 horas.

I. Teoría Básica

I.1. Para abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$, $J \subset \mathbb{R}$, sea $f : J \times U \to \mathbb{R}^n$ clase C^1 y Lipschitz en la variable $\bar{x} \in U$. Si $\bar{x} : J \to U$ es una solución particular al problema de condición inicial

$$\bar{x}' = f(t, \bar{x}),$$

con $\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \in U$ y $0 \in J$, demuestra que dicha solución es única.

I.2. Calcula la solución general de la ecuación diferencial

$$x' = -\sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

y establece el intervalo de máxima definición para soluciones con condición inicial $x(t_0) = x_0 \geq 0$. ¿Qué ocurre con dicha solución cuando t se aproxima a los límites del intervalo de máxima definición?

I.3. Define $A : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una función matricial continua y considera el sistema de ecuaciones no autónomo $\bar{x}' = A(t)\bar{x}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que toda solución particular satisface

$$|\bar{x}(t)| \leq |\bar{x}(0)| \exp \int_0^t ||A(s)|| ds,$$

y por lo tanto, si $\int_0^t ||A(s)|| ds < \infty$, entonces la norma de $\bar{x}(t)$ está acotada cuando $t \to \infty$.

II. Estabilidad

II.1. Determina la estabilidad (en el sentido de Lyapunov) del origen para el sistema

$$\begin{aligned} x' &= -2y + yz - x^3, \\ y' &= x - xz - y^3, \\ z' &= xy - z^3. \end{aligned}$$

III. Teoría Geométrica

III.5. Considera un sistema plano $\bar{x}' = f(\bar{x})$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$. La *semiórbita positiva* de un punto $p \in \mathbb{R}^2$ se define como el conjunto

$$\Gamma_p^+ := \{\varphi_t(p) \mid t \in I_p, t > 0\}.$$

Decimos que Γ_p^+ es *acotada* si existe una constante $M > 0$ tal que $|\varphi_t(p)| \leq M$ para todo $t \in I_p, t > 0$.

Demuestra que cualquier disco abierto de $\mathbb{R}^2$ que contenga una semiórbita positiva y acotada, debe contener un punto de equilibrio del campo.