CIMAT

90EDO01 | Ecuaciones Diferenciales Ordinarias | Abril 30, 2013

Tarea 10

Para los problemas 2, 3 y 4, se supone un sistema $\bar{x}' = f(\bar{x})$ donde $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es C^1 y $\varphi_t(\bar{x})$ representa el flujo del sistema.

1. Calcula el sistema de ecuaciones en coordenadas polares a partir del sistema en $\mathbb{R}^2$ dado por $x' = -y - xy$, $y' = x + x^2$. Analiza las componentes del campo polar y determina el comportamiento de las soluciones para distintas condiciones iniciales de r. Interpreta tus resultados para el sistema en coordenadas cartesianas. ¿Qué ocurre si $x < 1$?

2. Demuestra que $\omega(\bar{x})$ y $\alpha(\bar{x})$ son conjuntos cerrados y totalmente invariantes bajo el flujo del sistema.

3. Sea $K \subset U$ un compacto no vacío. Si K es totalmente invariante bajo el flujo del sistema, demuestra que para cualquier $\bar{x} \in K$, los conjuntos $\alpha(\bar{x})$ y $\omega(\bar{x})$ son no vacíos, conexos y compactos.

4. Omitiendo la hipótesis de compacidad en el problema anterior, construye un ejemplo de un flujo no trivial cuyo ω-límite es no vacío y disconexo.

5. Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $g : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dos campos vectoriales C^1, donde g es el "push forward" de f bajo el difeomorfismo $H : U \to V$ que preserva orientación. Demuestra que

   (a) el número de soluciones periódicas del sistema $\bar{x}' = f(\bar{x})$ y de $\bar{y}' = g(\bar{y})$ es el mismo.

   (b) Si $\hat{x}$ es el único punto de equilibro de f y es asintóticamente estable (estable o inestable), ¿es verdad que el punto de equilibrio del sistema $\bar{y}' = g(\bar{y})$ es también asintóticamente estable (estable o inestable)? Demuestra o proporciona un contraejemplo.

Fecha de entrega: Mayo 7, 2013 (en clase).