CIMAT

90EDO01 — Ecuaciones Diferenciales Ordinarias — Mayo 7, 2013

Tarea 11

1. Encuentra el cambio de variable $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que rectifica el campo de las siguientes sistemas al campo $u' = 0, v' = 1$ (o $u' = 1, v' = 0$) sobre puntos regulares:
   (a) $x' = x$, $y' = -y$,
   (b) $x' = -y$, $y' = x$.

2. Demuestra que el sistema de ecuaciones en coordenadas polares

$$\theta' = 1, \quad r' = \begin{cases} r^2 \sin(1/r), & r > 0 \\ 0, & r = 0 \end{cases}$$

tiene un punto de equilibrio estable en el origen polar.

3. Considera el sistema en $\mathbb{R}^3$ definido como

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' &= x + y(1 - x^2 - y^2), \\ z' &= z. \end{aligned}$$

   (a) Reescribe el sistema en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y resuelvelo.
   (b) Verifica que el punto $p = (1, 0, 0)$ pertenece a una solución periódica del sistema cilíndrico cuya órbita Γ coincide con $S^1 \times \{0\}$.
   (c) Define la sección $\Sigma = \{(r, \theta, z) \mid \theta = \theta_0, r > 0, z \in \mathbb{R}\}$ y el mapeo de Poincaré $\mathcal{P} : \Sigma \to \Sigma$ tal que $(r, z) \mapsto \mathcal{P}(r, z)$. Calcula $D\mathcal{P}(r, z)$ y muestra que $D\mathcal{P}(1, 0)$ tiene valores propios -1 y 1.
   (d) Determina la estabilidad de Γ.

4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ clase C^1. Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, define $F_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como $F_\varepsilon(x) = x + \varepsilon f(x)$. Demuestra que F_ε es invertible en una vecindad del origen y calcula $DF_\varepsilon^{-1}(0)$.

Fecha de entrega: Mayo 14, 2013 (en clase).