CIMAT

90EDO01 | Ecuaciones Diferenciales Ordinarias | Mayo 14, 2013

Tarea 12

En todos los problemas, $\bar{x}' = f(\bar{x})$ con $f \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ y $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto.

1. Denota por $A \subset U$ el anillo $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$, donde $\bar{x} = (x, y)$. Supón que para todo punto $\bar{x} \in \partial A$, $f(\bar{x})$ apunta hacia el interior de A y que cada segmento radial de A es una sección transversal al campo vectorial. Demuestra *sin utilizar el Teorema de Poincaré-Bendixson* que A contiene una órbita cerrada. *(Sugerencia: Construye un mapeo de Poincaré sobre alguna sección radial.)*

2. Demuestra el siguiente criterio de no existencia de órbitas periódicas:

   Si existe $D \subset \mathbb{R}^2$ una región simplemente conexa donde $\operatorname{div}(f)$ no es idénticamente cero y su signo es constante, entonces el sistema de ecuaciones no tiene órbitas cerradas en D.

   (Sugerencia: supón la existencia de una región en D acotada por una órbita periódica y llega a una contradicción aplicando el Teorema de Green.)

3. Demuestre que el sistema

$$x' = ax - y + xy^2, \quad y' = x + ay + y^3,$$

   tiene un cíclo límite inestable cuando $a < 0$ y ningún cíclo límite cuando $a > 0$.

4. Demuestra que para valores pequeños de $\varepsilon < 0$, el sistema asociado al oscilador de Van der Pol, $x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$ tiene al menos un cíclo límite. Determina la estabilidad del cíclo.

5. Considere el sistema

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x + y(1 - x^2 - 2y^2). \end{aligned}$$

   Demuestre que el sistema tiene un cíclo límite estable encontrando una región anular en $\mathbb{R}^2$ que es positivamente invariante bajo el flujo del sistema y no contiene puntos de equilibrio.

Definiciones a la vuelta

Definiciones:

1. Sea Γ una órbita cerrada en U. Si existe un $\bar{x} \in U \backslash \Gamma$ tal que $\Gamma \subset \omega(\bar{x}) \cup \alpha(\bar{x})$, entonces Γ es llamada *cíclo límite*. Si $\Gamma \subset \omega(\bar{x})$ o si $\Gamma \subset \alpha(\bar{x})$, entonces Γ es un ω- o un α-cíclo límite.

2. Un cíclo límite es *estable* si existe una vecindad V de Γ contenida en U tal que para todo $\bar{x} \in V$, Γ es su ω-cíclo límite.

3. Si en cambio, para toda $\bar{x} \in V$, Γ es su α-cíclo límite, entonces Γ es *inestable*.

4. Decimos que Γ es *semi-estable* si existen ambos comportamientos (estable e inestable) en la misma vecindad.

Fecha de entrega: Mayo 22, 2013, antes de las 11.00 horas, en mi oficina (D3).