CIMAT

90EDO01 — Ecuaciones Diferenciales Ordinarias — Febrero 5, 2013

Tarea 2

1. Utilizando la Desigualdad de Gronwall, proporciona una demostración alternativa a la unicidad de soluciones del problema de valor inicial

$$x' = f(x) \quad x(t_0) = x_0,$$

donde $f \in C^1(U, E)$, $U \subset E$ abierto y E es un espacio de Banach.

2. Sea $\varphi : J \times U \to E$ un flujo definido sobre abiertos $J \subset \mathbb{R}$ y $U \subset E$. Demuestra que existe una ecuación diferencial cuyo conjunto de soluciones es el flujo φ.

3. Sean $f, g \in C^1(U, E)$ y $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado que contiene a t_0. Denota por $z, w : J \to U$ dos soluciones a las ecuaciones diferenciales

$$z' = f(z) \quad \text{y} \quad w' = g(w).$$

Si existen $\varepsilon, \delta > 0$ tales que para toda $x \in U$,

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad |z(t_0) - w(t_0)| \leq \delta,$$

demuestra que $|z(t) - w(t)|$ crece a lo más de forma exponencial para $t \in J$.

4. Para $\bar{x}_0, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ de coeficientes constantes reales (esto es $a_{ij} \in \mathbb{R}$), enuncia y demuestra un teorema local de existencia y unicidad para el sistema de ecuaciones diferenciales con condición inicial:

$$\bar{x}' = A\bar{x}, \quad \text{con} \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0.$$

5. Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ acotada, esto es para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| \leq M$ para algún $M > 0$. Demuestra que el intervalo de máxima definición de cualquier solución particular de $x' = f(x)$ es todo $\mathbb{R}$.

Fecha de entrega: Febrero 12, 2013 (en clase).