CIMAT

90EDO01 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Febrero 12, 2013

Tarea 3

Sea $W \subset \mathbb{R} \times E$ no vacío. Decimos que una función $f : W \to E$ dada por $(t,x) \mapsto f(t,x)$, es *Lipschitz en* x si existe una constante $K > 0$ tal que

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq K|x_1 - x_2|,$$

para toda $(t,x_1),(t,x_2) \in W$.

1. Encuentra el abierto $W \subset \mathbb{R}^2$ más grande donde $f(t,x) = t\sqrt{x}$ es Lipschitz en la variable x y resuelve ahí la ecuación $x' = t\sqrt{x}$, con $x(t_0) = 0$. Calcula el intervalo abierto de máxima definición.

2. Si $f \in C^1(W,E)$, Lipschitz en x y $x : J \to E$ es una solución particular al problema de condición inicial

$$x' = f(t,x), \quad \text{con} \quad x(t_0) = x_0$$

demuestra que es única.

3. Considera el sistema de ecuaciones diferenciales autónomas

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

(a) Calcula todas las soluciones de equilibrio del sistema (esto es, encuentra los ceros del campo $F(x,y) = (y, \operatorname{sen} x)$).

(b) Para cada solución de equilibrio $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$ calcula el sistema variacional

$$u' = DF(\bar{x}_0)u, \quad u : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

y resuelvelo para la condición inicial $u(0) = u_0$.

(c) Bosqueja cómo se comportan las soluciones del sistema original a partir de la aproximación $t \mapsto \bar{x}_0 + u(t)$ si $|\bar{x}_0 - u_0|$ suficientemente pequeño.

4. Proporciona los detalles más importantes de la demostración del teorema de existencia y unicidad local para operadores lineales.

Fecha de entrega: Febrero 19, 2013 (en clase).