CIMAT

90EDO01 — Ecuaciones Diferenciales Ordinarias — Febrero 19, 2013

Tarea 4

1. Encuentra una matriz fundamental del sistema $\bar{x}' = A(t)\bar{x},\ \bar{x} \in \mathbb{R}^2$, donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1/t \\ 1+t & -1 \end{pmatrix},\ t > 0, \quad \text{y} \quad \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix},$$

es una solución conocida. *Sug.:* Fórmula de Liouville.

2. Usando la definición de determinante vista en clase, demuestra que

$$\det \Phi(t+h) = \Big(1 + h\mathrm{tr}A(t)\Big)\det \Phi(t) + o(h^2).$$

3. Para cada una de las matrices de coeficientes constantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

   (a) calcula la forma canónica real de Jordan y su matriz de similitud,
   (b) resuelve los sistemas matriciales $\bar{y}' = J_A\bar{y}$ y $\bar{y}' = J_B\bar{y}$, donde $J_A$ y $J_B$ representan las formas canónicas del inciso anterior,
   (c) calcula las matrices principales fundamentales en $t = 0$ para los sistemas $\bar{x}' = A\bar{x}$ y $\bar{x}' = B\bar{x}$.

4. Demuestra que $\mathcal{L}(E)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma de operadores.

5. Demuestra que para $A, B \in \mathcal{L}(E)$, $||AB|| \le ||A||||B||$ y en consecuencia $||A^k|| \le ||A||^k$ para todo $k \ge 0$ entero.

6. Demuestra las siguientes propiedades del operador exponencial:

   (1) Si $B \in \mathcal{L}(E)$ es no singular, entonces $B^{-1}e^A B = \exp(B^{-1}AB)$ para cualquier $A \in \mathcal{L}(E)$.
   (3) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$ y en particular, $\exp(\mathcal{L}(E)) \subseteq GL(E)$.

*Continúa a la vuelta*

7. Verifica la identidad

$$\exp\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

haciendo la descomposición de $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) = S + M$, donde $S = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ y $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Fecha de entrega: Marzo 5, 2013 (en clase).