CIMAT

90EDO01 | Ecuaciones Diferenciales Ordinarias | Marzo 5, 2013

Tarea 5

1. Para las matrices A y B del problema 3, tarea 4, calcula las direcciones principales de las soluciones y bosqueja los espacios fase asociados. Si los flujos son hiperbólicos, determina la descomposición única de $\mathbb{R}^n$ en espacios estable e inestable.

2. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que para todo $\lambda \in \text{Spec}(A)$, $\text{Re}(\lambda) \leq 0$.
   (a) Si A es semisimple, demuestra que toda solución de $\bar{x}' = A\bar{x}$ es acotada para tiempo $t \to +\infty$.
   (b) Si A no es semisimple, proporciona un ejemplo (de una matriz A) para la cual, el sistema $\bar{x}' = A\bar{x}$ tiene una solución que cumple
   $$\lim_{t \to +\infty} |\bar{x}(t)| = \infty.$$

3. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y denota por J_A su forma real de Jordan. Si $\varphi(t, \bar{x}) = e^{tA}\bar{x}$ y $\psi(t, \bar{x}) = e^{tJ_A}\bar{x}$, demuestra que dichos flujos son topológicamente conjugados.

4. Considera el sistema $\bar{x}' = A\bar{x}$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ el cual define un flujo hiperbólico. Sea $n_s = \dim E^s$. Demuestra que $\bar{x}' = A\bar{x}$ es topológicamente equivalente al sistema
   $$\begin{aligned} \bar{y}_s' &= -\bar{y}_s, \qquad && \bar{y}_s \in \mathbb{R}^{n_s}, \\ \bar{y}_u' &= \bar{y}_u, \qquad && \bar{y}_u \in \mathbb{R}^{n-n_s}. \end{aligned}$$

Definiciones: Dos flujos completos $\varphi, \psi : \mathbb{R} \times E \to E$ son *topológicamente conjugados* si existe un homeomorfismo $h : E \to E$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}, x \in E$
$$h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x)).$$
Esto es, h preserva la parametrización del tiempo (pero no preserva necesariamente orientaciones). Dos flujos completos $\varphi, \psi : \mathbb{R} \times E \to E$ son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo $h : E \to E$ que preserva orientación y tal que para todo $t \in \mathbb{R}, x \in E$,
$$h(\varphi_t(x)) = \psi_{s(t,h(x))}(h(x)),$$
donde $s(t, h(x))$ es una función creciente de t para cada $h(x)$.

Fecha de entrega: Marzo 12, 2013 (en clase).