CIMAT

90EDO01	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	Marzo 12, 2013

Tarea 6

1. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ y considera la matriz

$$N_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\det(A) & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

   (a) Demuestra que Spec(N_A)=Spec(A) y calcula los valores propios de N_A en función de $\det(A)$ y $\operatorname{tr}(A)$.

   (b) Usando por coordenadas $(\operatorname{tr}(A), \det(A))$ sobre $\mathbb{R}^2$, encuentra las regiones de estabilidad[1] del origen para el sistema $\bar{x}' = N_A\bar{x}$ descritas por los valores propios de N_A.

   (c) ¿Qué ocurre en las fronteras de dichas regiones?

2. Enuncia y demuestra un teorema análogo al Teorema de Pozos No Lineales para fuentes no lineales que concluya la inestabilidad del punto de equilibrio $\hat{x}$ para el sistema no lineal $\bar{x}' = f(\bar{x})$.

3. Proporciona un ejemplo de una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, C^1, no constante, $f(0) = 0$, $\operatorname{Spec}(Df(0)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ y para toda solución $t \mapsto \bar{x}(t)$ de $\bar{x}' = f(\bar{x})$, $\lim_{t\to\infty} \bar{x}(t) = 0$.

4. Considera el sistema de ecuaciones diferenciales del péndulo con fricción

$$\begin{aligned} \theta' &= \omega, \\ \omega' &= -\sin\theta - A\omega, \end{aligned}$$

   con $A = k/m$. Para los puntos de equilibrio $(n\pi, 0)$ con $n = 0, \pm 1$, determina su estabilidad linealizando (si es suficiente) o utilizando el método directo de Lyapunov. Bosqueja en un mismo diagrama el espacio fase asociado a cada punto e interpreta el significado físico de las soluciones.

5. Verifica el resultado del problema 4, tarea 5, para el sistema $\bar{x}' = A\bar{x}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Fecha de entrega: Marzo 19, 2013 (en clase).

[1] Esto es, regiones del plano donde $\hat{x} = 0$ es un punto estable, inestable, silla, centro, etcétera.