CIMAT

90EDO01 | Ecuaciones Diferenciales Ordinarias | Marzo 19, 2013

Tarea 7

1. Proporciona un ejemplo de una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, C^1, no constante, $f(0) = 0$, $\mathrm{Spec}(Df(0)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$ y tal que, para alguna solución $t \mapsto \bar{x}(t)$ de $\bar{x}' = f(\bar{x})$, se cumple $\lim_{t\to\infty} |\bar{x}(t)| = \infty$.

2. Demuestra el siguiente resultado sobre inestabilidad.

   Dados $\hat{x}$ un punto de equilibrio no lineal, $U = U(\hat{x}) \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $L : U \to \mathbb{R}$ una función clase C^1 tal que

   $$L(\hat{x}) = 0 \ \text{ y } \ \dot{L}(x) > 0 \ \text{ para todo } \ x \in U - \{\hat{x}\}.$$

   Si $L(x_n) > 0$ para alguna sucesión $\{x_n\} \subset U$ tal que $x_n \to \hat{x}$, entonces $\hat{x}$ es inestable.

3. Usando el resultado anterior, demuestra lo siguiente.

   Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, C^1, con $f(0) = 0$. Si algún valor propio de $Df(0)$ tiene parte real positiva, entonces para $-\infty < t \leq 0$ existe una solución $t \mapsto x(t)$ de $x' = f(x)$ tal que $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$.

4. Dada la ecuación diferencial de segundo orden

   $$x'' - \varepsilon x' + g(x) = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

   estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación determinando las condiciones necesarias sobre la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para que dichos puntos sean estables o asintóticamente estables.

5. Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, considera el sistema

   $$\begin{aligned} x' &= y\cos(x) \\ y' &= \sin(x). \end{aligned}$$

   Verifica que el sistema es un sistema gradiente, calcula el potencial, identifica los puntos de equilibrio, determina su estabilidad y dibuja el espacio fase asociado incluyendo las superficies de nivel del potencial.

Continúa a la vuelta

Para pensar durante las vacaciones

Hemos visto que operador $\exp : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ satisface

$$\exp(\mathcal{L}(E)) \subset GL(E).$$

En notación matricial esto significa que para toda matriz $A \in M_{n\times n}(K)$ (con $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$), e^A es una matriz invertible.

¿Será verdad que $\exp(\mathcal{L}(E)) = GL(E)$? Esto implicaría que toda matriz invertible puede escribirse como la exponencial de otra matriz.

Fecha de entrega: Abril 9, 2013 (en clase).