CIMAT

90EDO01 | Ecuaciones Diferenciales Ordinarias | Abril 9, 2013

Tarea 8
(nueva versión)

1. Sea $L : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de Lyapunov estricta para $\hat{x} \in U$, un punto de equilibrio aislado del sistema $x' = f(x)$. Si suponemos que L es también estricta para todo $\mathbb{R}^n$ y satisface

$$\lim_{|x|\to\infty} L(x) = \infty,$$

demuestra que $\hat{x}$ es *globalmente asintóticamente estable*, esto es, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_t(x) \to \hat{x}$ cuando $t \to \infty$.

2. Sean σ, b, r constantes tales que $\sigma, b > 0$ y $0 < r < 1$. Considera el sistema de Lorenz

$$x' = \sigma(y - x), \quad y' = rx - y - xz, \quad z' = xy - bz.$$

Aplica el problema anterior para demostrar que el origen es globalmente asintóticamente estable.

3. Para el sistema gradiente $w' = -\nabla\Phi(w)$, con $\Phi(w) = \Phi(x, y) = 2x^2 - 2xy + 5y^2 + 4x + 4y + 4$, calcula los puntos de equilibrio y clasificalos de acuerdo a su estabilidad. Bosqueja las superficies de nivel de Φ en el diagrama fase del sistema.

4. Problema anulado.

5. Considera un sistema lineal hiperbólico $\bar{x}' = A\bar{x}$ y su flujo $\varphi_t(\bar{x})$. Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, ¿qué puedes decir sobre $V(t) = \mathrm{Vol}(\varphi_t(U))$?

Fecha de entrega: Abril 16, 2013 (en clase).