CIMAT

90EDO01 | Ecuaciones Diferenciales Ordinarias | Abril 23, 2013

Tarea 9

1. Demuestra el Teorema de Floquet para matrices reales:

    Si $A(t) \in GL(n,\mathbb{R})$ para toda t, entonces la forma canónica de Floquet es $\Phi(t) = Q(t)e^{tR}$, donde $R \in GL(n,\mathbb{R})$ y para toda t, $Q(t) \in GL(n,\mathbb{R})$, es diferenciable y $2T$-periódica (pero no T-periódica).

2. Demuestra el resultado de cambio de variable para matrices reales:

    Considera el sistema lineal periódico real $\bar{x}' = A(t)\bar{x}$, con $A(t + T) = A(t) \in GL(n,\mathbb{R})$. Para cada t, el cambio de variable ($2T$-periódico) $x(t) = Q(t)y(t)$ transforma el sistema lineal periódico en el sistema $\bar{y}' = R\bar{y}$.

3. Demuestra el siguiente resultado de inestabilidad:

    Si los multiplicadores característicos $\mu \in \mathrm{Spec}(M_0)$ de un sistema lineal periódico $\bar{x}' = A(t)\bar{x}$ (ya sea real o complejo) satisfacen $|\mu| > 1$, entonces la solución de equilibrio $\hat{x} \equiv \bar{0}$ es inestable.

4. Considera la función Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, definida por

    $$H(q,p) = q_2p_1 - q_1p_2 + q_4p_3 - q_3p_4 + q_2q_3.$$

    Nota que el origen, $\hat{x} = \bar{0} \in \mathbb{R}^8$, es un punto de equilibrio del sistema Hamiltoniano $\bar{q}' = \partial_{\bar{p}}H$, $\bar{p}' = -\partial_{\bar{q}}H$. Para determinar la estabilidad del origen, primero

    (a) calcula los valores propios del sistema lineal $\bar{u}' = DX_H(\bar{0})\bar{u}$ asociado y determina la estabilidad de $\hat{u} = \bar{0}$ ¿Qué puedes decir sobre $\hat{x}$?

    (b) Demuestra que $\hat{x}$ es inestable para el sistema Hamiltoniano.

5. Para cada matriz, haz un bosquejo (*lo más preciso posible*) del plano fase del sistema $\bar{x}' = A\bar{x}$ identificando las direcciones asintóticas (si existen) con

respecto a $t \to +\infty$ o $t \to -\infty$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sugerencia: para facilitar el cálculo de valores propios, nota que cada matriz está escrita en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\det(A) & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

Fecha de entrega: Abril 30, 2013 (en clase).