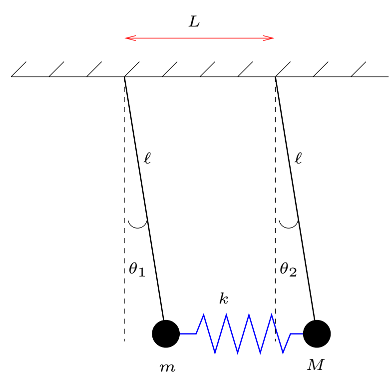
2a. tarea del curso de Análisis de Fourier

Héctor Morales
Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.

3 de octubre de 2011

Dos masas desiguales M y m $(M > m)$ cuelgan de un par de cuerdas de igual longitud ℓ sujetas de un soporte como muestra la figura. Las masas están acopladas mediante un resorte de constante k cuya longitud de equilibrio L coincide con la distancia de separación entre los soportes de cada cuerda.



1. Halle las frecuencias de los modos normales para oscilaciones "pequeñas" a lo largo de la línea que une a las masas. De la relación entre el movimiento de M y m en cada modo. Escriba la solución más general.

   Bajo la suposición de que las oscilaciones satisfacen la ley de Hooke, las ecuaciones diferenciales ordinarias de este movimiento están dadas por:

$$m\ell\ddot{\theta}_1 + (mg + k\ell)\theta_1 - k\ell\theta_2 = 0,$$
$$M\ell\ddot{\theta}_2 + (Mg + k\ell)\theta_2 - k\ell\theta_1 = 0.$$

Intentamos una solución del tipo $\theta_1 = Ae^{i\omega t}$, $\theta_2 = Be^{i\omega t}$ y escribiendo al par de ecuaciones como

$$\begin{pmatrix} mg + k\ell - m\ell\omega^2 & -k\ell \\ -k\ell & Mg + k\ell - M\ell\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación secular (polinomio en ω) es

$$\begin{vmatrix} mg + k\ell - m\ell\omega^2 & -k\ell \\ -k\ell & Mg + k\ell - M\ell\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

que determina a las frecuencias angulares de los modos normales

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{mMg + k\ell(m+M)}{mM\ell}}.$$

Ahora bien, como

$$\frac{A}{B} = \frac{Mg + k\ell - M\ell\omega^2}{k\ell},$$

tenemos que

$$\frac{A}{B} = 1 \quad \text{para} \quad \omega = \omega_1$$

$$\frac{A'}{B'} = -\frac{M}{m} \quad \text{para} \quad \omega = \omega_2.$$

Entonces, para $\omega = \omega_1$,

$$\theta_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \qquad \theta_2 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$

para $\omega = \omega_2$,

$$\theta_1 = A'\cos(\omega_2 t + \varphi_2), \qquad \theta_2 = -\frac{m}{M}A'\cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

y, entonces, la solución más general es

$$\begin{aligned} \theta_1 &= A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A'\cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ \theta_2 &= A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{m}{M}A'\cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned}$$

2. Tomemos el caso particular cuando $t = 0$, m está en reposo y en su posición de equilibrio y M se suelta, a partir del reposo, con un desplazamiento inicial positivo $\theta_2 = \theta_0$, por ejemplo. Si la energía total del sistema es E_0 y el resorte es muy débil, halle la energía máxima adquirida por m durante el movimiento subsecuente para el caso $\frac{M}{m} = 2$.

   Inicialmente, en $t = 0$, $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$, dado que $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ y $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \theta_0$, da como resultado que

   $$A = \frac{M}{m+M}\theta_0, \quad A' = A.$$

   la energía inicial total es E_0; es decir,

   $$E_0 = \frac{1}{2}k\ell^2\theta_0^2 + \frac{1}{2}Mg\ell\theta_0^2,$$

   tenemos que, como θ_0 es positivo, entonces

   $$\theta_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{(k\ell + Mg)\ell}}.$$

   Si, además $M = 2m$, la solución general se reduce a

   $$\theta_1 = \frac{2}{3}\theta_0 \left[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)\right],$$

   $$\theta_2 = \frac{2}{3}\theta_0 \left[\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2}\cos(\omega_2 t)\right].$$

   con

   $$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2mg + 3k\ell}{2m\ell}}, \quad \theta_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{(2mg + k\ell)\ell}}.$$

3. ¿En dónde se emplea la suposición de que el resorte es débil?

   La energía de m es

   $$E_1 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mg\ell\theta_1^2.$$

Si el resorte es muy débil podemos tomar $k\ell \ll mg$ tal que

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell}\left(1 + \frac{3k\ell}{2mg}\right)} \approx \sqrt{\frac{g}{\ell}}\left(1 + \frac{3k\ell}{4mg}\right) = \omega_1(1+\delta),$$

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{E_0}{mg\ell}}\left(1 - \frac{\delta}{3}\right),$$

donde

$$\delta = \frac{3k\ell}{4mg} \ll 1.$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} E_1 =& \frac{2}{9}mg\ell\theta_0^2\left[1 + (1+\delta)^2\sin^2(\omega_2 t) + \cos^2(\omega_2 t)\right. \\ & \left. -2(1+\delta)\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t) - 2\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)\right] \\ \approx& \frac{4}{9}E_0\left[1 - \cos(\omega_1 \delta t)\right], \end{aligned}$$

despreciando δ comparado con la unidad. Por lo anterior, la máxima energía de m es

$$\frac{8}{9}E_0.$$

Fecha de entrega: miércoles 21 de septiembre en la hora de clase o antes en mi pichonera. Descontaré 1 punto por día de retraso en la entrega.