3er. tarea del curso de Análisis de Fourier

Héctor Morales
Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.

4 de octubre de 2011

(20 pts.) 1. Calcule los coeficientes de la serie de Fourier de la delta de Dirac $f = \delta(x)$; es decir, los números a_i y b_i, para $i = 1, 2, 3, \ldots$, de

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \operatorname{sen}(x) + a_2 \cos(x) + b_2 \operatorname{sen}(x) + \cdots$$

Solución. Más bien deberíamos de hablar de un función períodica de deltas, una en cada punto $x = 0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, \ldots$. Entonces es períodica, con un impulso en cada período. Dado que integrando cualquier producto $g(x)\delta(x)$ nos regresar el valor de g en $x = 0$, los coeficientes de una delta de Dirac son

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \delta(x) dx = \frac{1}{2\pi}, \\ a_i &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \delta(x) \cos(x) dx = \frac{1}{\pi}, \\ b_i &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \delta(x) \operatorname{sen}(x) dx = 0. \end{aligned}$$

(80 pts.) 2. Dada la ecuación estacionaria de Schrödinger

$$\left[-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - V(x) \right] u(x) = E u(x),$$

supongamos que el potencial $V(\cdot)$ es de la forma $V(x) = -V_0 \delta(x)$; $V_0 > 0$; $x \in \mathbb{R}$. La correspondiente función de onda $u(\cdot)$ se supone que es suave (clase $\mathcal{C}^\infty$), y $\delta(\cdot)$ es la delta de Dirac (definida en clase).

(a) Calcule los estados ligados ($E < 0$) que están localizados en este potencial.

(b) Calcule la expresión para la onda reflejada y entrante debida a este potencial y halle el coeficiente de reflexión

$$R = \left.\frac{|u_r|^2}{|u_i|^2}\right|_{x=0},$$

donde u_r y u_i son las ondas reflejada y entrante, respectivamente.

(c) Pista: Para evaluar el comportamiento de $u(x)$ en $x = 0$, integre la ecuación de Schrödinger sobre el intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ y considere el límite cuando $\epsilon \to 0$.

Solución. (a) La ecuación de Schrödinger está dada por

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - V_0\delta(x)\right] u(x) = Eu(x).$$

Cuando $x \neq 0$ tenemos una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}u(x).$$

Cuyas soluciones son de la forma

$$u(x) = Ae^{-\beta x} + Be^{\beta x} \quad \text{si} \quad x > 0 \quad \text{o} \quad x < 0,$$

con $\beta = \sqrt{-2mE/\hbar^2} \in \mathbb{R}$. Como $|u|^2$ debe ser integrable, no debe poseer parte exponencial que crezca. Además, la función de onda $u(\cdot)$ debe ser continua en el origen $x = 0$. Por lo anterior,

$$u(x) = \begin{cases} A\exp(\beta x), & x < 0, \\ A\exp(-\beta x), & x > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Integrando la ecuación de Schrödinger de $-\epsilon$ a $+\epsilon$, obtenemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[u'(\epsilon) - u'(-\epsilon)\right] - V_0 u(0) = E\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} u(x)dx \approx 2\epsilon E u(0).$$

Insertando el resultado (1) y tomando el límite $\epsilon \to 0$, tenemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-\beta A - \beta A) - V_0 A = 0$$

o $E = -m(V_0^2/2\hbar^2)$. De aquí se deduce que sólo hay (sorprendentemente) un valor propio de la energía. La constante de normalización se halla que es $A = \sqrt{mV_0/\hbar^2}$.

(b) La función de onda de una onda plana se describe por medio de

$$u(x) = A\exp(ikx), \quad \text{con} \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Se "mueve" de izquierda a derecha y es reflejada por el potencial. Si B y C son las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas, respectivamente, obtenemos que

$$u(x) = \begin{cases} A\exp(ikx) + B\exp(-ikx), & x < 0, \\ C\exp(ikx), & x > 0. \end{cases}$$

Las condiciones de continuidad y la relación $u'(\epsilon) - u'(-\epsilon) = \lambda u(0)$, con $\lambda = 2mV_0/\hbar^2$ dan

$$\left.\begin{array}{c} A + B = C \\ ik(C - A + B) = -\lambda C \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{\lambda}{\lambda + 2ik}A, \\ C = \dfrac{2ik}{\lambda + 2ik}A. \end{cases}$$

El coeficiente de reflexión buscado es entonces

$$R = \left.\frac{|u_r|^2}{|u_i|^2}\right|_{x=0} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{m^2V_0^2}{m^2V_0^2 + \hbar^4k^2}.$$

Si el potencial es extremadamente fuerte ($V_0 \to \infty$), $R \to 1$, *i.e.*, la onda completa es reflejada.

El *coeficiente de transmisión* es, por otro lado,

$$T = \left.\frac{|u_T|^2}{|u_i|^2}\right|_{x=0} = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{\hbar^4k^2}{m^2V_0^2 + \hbar^4k^2}.$$

Si el potencial es muy fuerte, ($V_0 \to \infty$), $T \to 0$, *i.e.*, la onda transmitida se anula.

Por otro lado, se cumple que $R + T = 1$, como se espera.

Fecha de entrega: miércoles 12 de octubre en la hora de clase o antes en mi pichonera. Descontaré 1 punto por día de retraso en la entrega.