Capítulo #8 de Optimización II

Angel Eduardo Muñoz Zavala

16 de diciembre de 2005

0.1. El camino más corto

El camino más corto de un nodo i a un nodo j, en un grafo dirigido o no dirigido, es un problema de combinatoria; ya que existe un número finito de posibilidades para viajar del nodo i al nodo j, pasando a lo más una vez por el mismo nodo.

Como mencione anteriormente, el análisis es aplicable a grafos dirigidos o no dirigidos; imaginemos que tenemos el siguiente grafo dirigido que se muestra en la Figura 1:

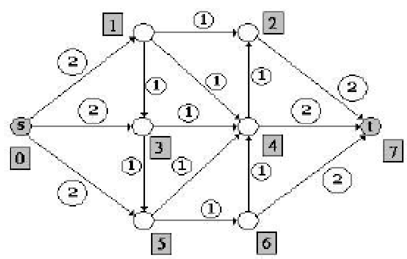

Figura 1: Grafo Dirigido

Es un ejemplo muy sencillo, donde a simple vista podemos obtener el camino más corto de un nodo a otro. Por ejemplo, el camino mas corto del nodo 0 al nodo 7, posee una distancia de 5 unidades y 3 caminos diferentes con esa misma distancia; como s eilustra en la Figura 1.

Desafortunadamente, no todos los grafos son asi de sencillos, pueden tener un enorme número de nodos y aún más aristas. Por este motivo, existen algoritmos que nos sirven para resolver nuestro problema de una forma iterativa. Pero antes de ver uno de esos algoritmos, primero debemos realizar ciertas definiciones.

0.2. Conceptos Básicos

Primero definamos un grafo D, como el conjunto de nodos V y de aristas A; $D = \{V, A\}$. Y sea $C_{i,j}$ el costo de viajar del nodo i al nodo j; es decir, la distancia entre 2 nodos contenidos en V.

Entonces, el costo total de ir de un nodo X a un nodo Y, es la suma de todas las aristas visitadas; es decir:

Sea $P(V_i, V_j)$ el camino a seguir para viajar del nodo V_i al nodo V_j, que pertencen al conjunto de nodos V:

$$
\begin{aligned}
P(V_i, V_j) \quad &= \quad \{w_0, w_1, ..., w_n : w_0 = V_i, w_n = V_j, \\
&\qquad (w_k, w_{k+1}) \in A, 0 \leq k < n\}
\end{aligned} \tag{1}
$$

El costo de un camino $P(V_i, V_j)$ se define como:

$$
C(P(V_i, V_j)) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{w_k, w_{k+1}} \qquad \forall w_k \in P(V_i, V_j) \tag{2}
$$

El problema de encontrar el camino más corto del nodo V_i al nodo V_j, se puede plantear como:

$$
\min_{P(V_i, V_j)} C(P(V_i, V_j)) \tag{3}
$$

Una forma de atacar el problema es:

$$
\min_{P(V_i, X)} C(P(V_i, X)) \qquad \forall X \in V \tag{4}
$$

Por lo tanto, equivale a encontrar los caminos más cortos del nodo V_i a cualquier nodo $X \in V$. Y para este problema de combinatoria usaremos el algoritmo que se revisa en la siguiente sección.

0.3. Método Dijkstra

El algoritmo de Dijkstra, se utiliza para encontrar la distancia más corta de un nodo V_i a otro nodo X que pertenecen a V, resolviendo una seria de subproblemas o subgrafos que van encontrando las distancias más cortas entre V_i y $Y \in W$, donde W_k es el conjunto de nodos del subgrafo en la iteración k-ésima.

El algoritmo de Dijkstra se presenta en la Figura 2, donde V es el conjunto de nodos y A el conjunto de aristas que pertenecen al grafo D.
donde $\rho(z)$ es la distancia del camino más corto del nodo s al nodo z. Pero, este método no tiene el procedimiento necesario para conocer el camino que se siguio para llegar de s a cada nodo; que es en especial el tema de este reporte. Para

Dado $D = \{V, A\}$ con costos $C_{i,j} \geq 0 \; \forall (i,j) \in A$
Y dado el nodo $s \in V$

Inicializar $W_0 = \{s\}, \rho(s) = 0$

$\forall y \in V - W_0$

$$\rho(y) = \begin{cases} C_{s,y} & si \quad (s,y) \in A \\ \infty & si \quad (s,y) \notin A \end{cases}$$

While $W_k \neq V$

Encontrar $\rho(x) = \text{mín}\{\rho(y) : y \notin W\}$

Hacer $W_{k+1} = W_k \cup \{x\}$

$\forall y \in V - W_{k+1}$

$$\rho(y) = \text{mín}\{\rho(y), \rho(x) + C_{x,y}\}$$

$$C_{x,y} = \begin{cases} C_{x,y} & si \quad (x,y) \in A \\ \infty & si \quad (x,y) \notin A \end{cases}$$

End

Figura 2: Pseudocódigo del Método Dijkstra

conocer el camino que el método de Dijkstra siguio para encontrar la distancia minima de un nodo s a un nodo y.

Notemos que en cualquier instante de la propagación existe un conjunto W de nodos con costo $\rho(x) \forall x \in V$. Por último, el camino más corto de s a y utiliza utiliza unicamente nodos en W, de otra forma existiría un $z \notin V$ cuya $\rho(z) < \rho(y)$ y tendría que insertarse primero en W, para después llegar a y.